Modeling financial market interpolations using martingale deflators

Цветкова И.В., Павлов И.В., Данекянц А.Г., Неумержицкая Н.В.

Донской Государственный Технический Университет

5 июня 2021 года, с.Дивноморское

Обзор литературы:

[1] Taqqu M S and Willnger W 1987 The analysis of finite security markets*Adv. Appl. Prorab.***9**pp 1–25

[2] Melnikov A V and Feoktistov K M2001 Questions of arbitrage-free and completeness of discrete markets and pricing of contingent claims*Review of Applied and Industrial Mathematics*Moscow: TVP**8–1** pp 28–40

[3] BogachevaM N and Pavlov I V 2002Haar extensions of arbitrage-freefinancial markets to markets that are complete and arbitrage-free *Russian Math. Surveys***57–3** pp 581–583

[4] Bogacheva M N and Pavlov I V 2002 Haar extensions of arbitrage-freefinancial markets to markets that are complete and arbitrage-free*Izvestiyavuzov North Caucasian region Natural sciences***3** pp 16–24

[5] Danekyants A G and Pavlov I V 2004 On the weakened property of universal Haar uniqueness *Review of Applied and Industrial Mathematics* Moscow: TVP **11–3** pp 506-508

Обзор литературы

[5] Danekyants A G and Pavlov I V 2004 On the weakened property of universal Haar uniqueness *Review of Applied and Industrial Mathematics* Moscow: TVP **11–3** pp 506-508

[6] Volosatova T A and Pavlov I V 2004 On the interpolation of financial markets, including arbitrage ones *Review of Applied and Industrial Mathematics* Moscow: TVP **11–3** pp 458-467

[7] GorgorovaV V and PavlovI V 2007On Haar uniqueness properties for vector-valued random processes*Russian Math. Surveys***62–6** pp 1202–1203

[8] Pavlov I V, Tsvetkova I V and Shamraeva V V2012 Some results on martingale measures of one-step models of financial markets related to the condition of non-coincidence of barycenters*VestnikRGUPS***3** pp 177–181

[9] Pavlov I V, Tsvetkova I V and Shamraeva V V2014 On the existence of martingale measures that satisfy the weakened condition of non-coincidence of barycenters: a constructivist approach*VestnikRGUPS***4** pp 132–138

[10] Pavlov I V, Tsvetkova I V and Shamraeva V V 2017 On the existence of martingale measures satisfying the weakened condition of noncoincidence of barycenters in the case of countable probability space *Theory of Probability and its Applications***61–1**pp 167–175

Общее определение дефлятора

Определение 1.

$\left(\Omega, F = (\mathsf{F}_k)_{k=0}^{K}, P\right),\; K < \infty$ - фильтрованное пространство;

$Z = (Z_k, \mathsf{F}_k)_{k=0}^{K}$ - адаптированный процесс (цена акции);

Процесс $D = (D_k, \mathsf{F}_k)_{k=0}^{K}$ называется дефлятором цены акции, если выполнены условия:

1) $D_0 = 1$ (условие нормировки);

2) $D = (D_k, \mathsf{F}_k)_{k=0}^{K}$ - мартингал;

3) $(D_k Z_k)_{k=0}^{K}$ - мартингал.

Случай : K=1

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n\}\ ,\ \ F=(\mathsf{F}_k)_{k=0}^{1},\ \mathsf{F}_0=\{\Omega,\varnothing\}\ ,\ \mathsf{F}_1=\sigma\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n\}$$

Зафиксируем некоторую невырожденную вероятностную меру P :

$$p_k=P(\omega_k)>0\ ,\ \ (k=1,2,\dots,n)$$

Рассмотрим процессы:

$$Z=(Z_k,F_k)_{k=0}^{1}\ :\ Z_0=a,\ Z_1(\omega_k)=\mathrm{b}_k,\ \ (k=1,2,\dots,n)$$

$$D=(D_k,F_k)_{k=0}^{1}\ :\ D_0=1\ ,\ D_1(\omega_k)=d_k\ ,\ \ (k=1,2,\dots,n)$$

$$E^P[D_1]=D_0$$

$$E^P[D_1\cdot Z_1]=D_0\cdot Z_0$$

Определение допустимого дефлятора, интерполирующая фильтрация

Определение 2. Дефлятор $D=\left(D_k,F_k\right)_{k=0}^{1}$ процесса $Z=\left(Z_k,F_k\right)_{k=0}^{1}$ называется допустимым, если для любого непустого $I\subset\{1,2,\dots,n\}$ выполняется неравенство :

$$\sum_{k\in I} p_k d_k \neq 0$$

Построение интерполяции:

Рассмотрим промежуточные моменты времени: $0=t_0<t_1<\dots<t_m=1$.

$H=\left(\mathrm{H}_{t_i}\right)_{i=0}^{m}$ -интерполяционная фильтрация фильтрации $F=\left(\mathrm{F}_k\right)_{k=0}^{1}$: $\mathrm{H}_{t_0}=\mathrm{F}_0$; $\mathrm{H}_{t_m}=\mathrm{F}_1$.

Построим два мартингала: $X=\left(X_{t_i},H_{t_i}\right)_{i=0}^{m}$; $X_{t_i}=E^P\left[D_1Z_1\middle|\mathrm{H}_{t_i}\right]$;

$$Y=\left(Y_{t_i},H_{t_i}\right)_{i=0}^{m} \;;\quad Y_{t_i}=E^P\left[D_1\middle|\mathrm{H}_{t_i}\right] .$$

Определение H-интерполирующего процесса Z

Определение 3.

Будем говорить, что процесс $Z^{\text{int}} = \left(Z_{t_i}^{\text{int}}, H_{t_i} \right)_{i=0}^{m}$: $Z_{t_i}^{\text{int}} = \dfrac{X_{t_i}}{Y_{t_i}}$

является H-интерполирующим процессом процесса Z с помощью допустимого дефлятора D .

$$Z_0^{\text{int}} = \frac{X_0}{Y_0} = Z_0 \qquad\qquad Z_1^{\text{int}} = \frac{X_1}{Y_1} = Z_1$$

Пример1. Рассмотрим безарбитражную ситуацию, т.е. процесс $Z=\left(Z_k,F_k\right)_{k=0}^{1}$ допускает мартингальную меру Q , эквивалентную физической мере P . $D=\left(D_k,F_k\right)_{k=0}^{1}$: $D_0=1$; $D_1=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$ **.** Как известно, этот процесс является строго положительным дефлятором.

$$E^Q\left[Z_1\middle|\mathrm{H}_{t_i}\right]=\frac{E^P\left[D_1Z_1\middle|\mathrm{H}_{t_i}\right]}{E^P\left[D_1\middle|\mathrm{H}_{t_i}\right]}=\frac{X_{t_i}}{Y_{t_i}}=Z_{t_i}^{\mathrm{int}}$$

Обратно: если у нас есть строго положительный дефлятор $D=\left(D_k,F_k\right)_{k=0}^{1}$, то мы получим мартингальную меру $Q(A)=\int\limits_A D_1 dP$.

Определение 4. Рассмотрим семейство интерполяционных фильтраций $\mathbf{H} = \{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$ фильтрации $F = (\mathsf{F}_k)_{k=0}^{1}$. Дефлятор $D = (D_k, \mathsf{F}_k)_{k=0}^{1}$ является $\mathbf{H}$ - интерполирующим дефлятором, если для всех интерполяций цен акций $Z^{\text{int}} = \left(Z_{t_i}^{\text{int}}, \mathsf{H}_{t_i}\right)_{i=0}^{m}$, $H = H_\alpha \in \mathbf{H}$ допускается только один дефлятор, а именно дефлятор $Y = \left(Y_{t_i}, \mathsf{H}_{t_i}\right)_{i=0}^{m}$.

Пример2. Рассмотрим безарбитражную ситуацию . Мартингальная мера $Q \sim P$ является $\mathbf{H}$ -интерполирующей, т.к интерполяция исходного процесса $\left(E^Q\left[Z_1 \middle| \mathsf{H}_{t_i}\right], \mathsf{H}_{t_i}\right)_{i=0}^{m}$ для всех $H = H_\alpha \in \mathbf{H}$ допускает только одну мартингальную меру, а именно Q .

Рассмотрим сначала случай: $n=1$, $\Omega=\{\omega_1\}$ тогда $Z_0=a, Z_1=b_1, D_0=D_1=1$.

Если $a\neq b_1$, тогда дефлятор единственен.

Если $a=b_1$, тогда $D_0=D_1=1$.

Теперь рассмотрим случай : $n=2$, $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$. Если $b_1\neq b_2$, то дефлятор существует и единственен. Если $b_1=b_2=a$, то существует бесконечно много дефляторов, но ни один из них не является интерполяционным .

Если $b_1=b_2\neq a$, то не существует дефляторов.

Рассмотрим случай: $n = 3$. Обозначим: $d_1 = D_1(\omega_1)$, $d_2 = D_1(\omega_2)$, $d_3 = D_1(\omega_3)$.

Система для нахождения дефляторов имеет вид:

$$\begin{cases} p_1 d_1 + p_2 d_2 + p_3 d_3 = 1 \\ p_1 b_1 d_1 + p_2 b_2 d_2 + p_3 b_3 d_3 = a. \end{cases}$$

если $b_1 = b_2 = b_3 \neq a$, то не существует дефляторов;

если $b_1 = b_2 = b_3 = a$, то дефляторов бесконечно много.

Теперь пусть хотя бы два числа будут разными, предположим : $b_1 \neq b_2$.

Решая систему, мы получаем бесконечно много дефляторов:

$$\begin{cases} d_1 = \dfrac{(b_2 - a) + p_3 (b_3 - b_2) d_3}{p_1 (b_2 - b_1)} \\ d_2 = \dfrac{(a - b_1) + p_3 (b_1 - b_3) d_3}{p_2 (b_2 - b_1)}. \end{cases}$$

Пусть $D=(D_k,\mathcal{F}_k)_{k=0}^1$ дефлятор процесса $Z=(Z_k,\mathcal{F}_k)_{k=0}^1$. В случае $n=3$ условия допустимости дефлятора : $d_k\neq 0$, $d_k\neq\frac{1}{p_k}$, $(k=1,2,3)$.

Определим интерполяционные фильтрации $H^{(\alpha)}=\left(\mathrm{H}_{t_i}^{(\alpha)}\right)_{i=0}^3$, $A=\{1,2,3\}$ фильтрации $F=(\mathrm{F}_k)_{k=0}^1$ следующим образом: $\mathrm{H}_{t_1}^{(1)}=\sigma\{\omega_1\}$, $\mathrm{H}_{t_1}^{(2)}=\sigma\{\omega_2\}$, $\mathrm{H}_{t_1}^{(3)}=\sigma\{\omega_3\}$.

Теорема1. 1) Если числа a,b_1,b_2,b_3 различны, то любой допустимый дефлятор $D=(D_k,\mathcal{F}_k)_{k=0}^1$ процесса $Z=(Z_k,\mathcal{F}_k)_{k=0}^1$ является $\mathbf{H}$-интерполирующим.

2) Если существует допустимый $\mathbf{H}$-интерполирующий дефлятор $D=(D_k,\mathcal{F}_k)_{k=0}^1$ процесса $Z=(Z_k,\mathcal{F}_k)_{k=0}^1$, то числа a,b_1,b_2,b_3 различны.

Пусть $\mathbf{H} = \{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - семейство всех интерполяционных фильтраций.

Лемма. Если $n \geq 4$ и существует хотя бы один $\mathbf{H}$-интерполяционный дефлятор, то числа $a, b_1, b_2, \dots, b_n$ различные.

Теорема 2. Если $n \geq 4$ и числа $a, b_1, b_2, \dots, b_n$ различные, то существует как $\mathbf{H}$-интерполирующий дефлятор, так и дефлятор не являющийся $\mathbf{H}$-интерполирующим.

Предположение. Множество $\mathbf{H}$-интерполирующих дефляторов плотно во множестве всех дефляторов.

Благодарю за внимание!