Слабо надкритический ветвящийся процесс с иммиграцией в случайной среде

Афанасьев В.И.

Математический институт им. В.А. Стеклова
Отдел дискретной математики

viafan@mail.ru

31 мая – 5 июня 2021 г.

Случайная среда

Назовем *случайной средой* случайный элемент, сопоставляющий элементарному исходу последовательность $\Pi := \{Q_n, \ n \in \mathbf{N}\}$, где $Q_n = (F_n, G_n)$ – пара вероятностных распределений на множестве $\mathbf{N}_0$ при каждом $n \in \mathbf{N}$. Сопоставим распределениям F_n и G_n производящие функции f_n и g_n.

Определение ВПИСС (1)

Ветвящимся процессом с иммиграцией в случайной среде (ВПИСС) называется такой случайный процесс, который при фиксированной среде Π является (неоднородным) ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона с (неоднородной) иммиграцией.

Определение ВПИСС (2)

При этом при каждом $n \in \mathbf{N}_0$ к частицам n-го поколения присоединяются иммигранты в соответствии с распределением G_{n+1} и они все вместе в соответствии с распределением F_{n+1} формируют $(n+1)$-ое поколение.

Формальное определение

Последовательность неотрицательных целочисленных с. в. $\{Z_n,\ n \in \mathbf{N}_0\}$ называется ВПИСС, если $Z_0 = 0$ и

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n+\eta_n} \xi_i^{(n)}, \qquad n \in \mathbf{N}_0,$$

причем при фиксированной среде Π с. в. $\left\{\xi_i^{(n)}, \eta_n :\ n \in \mathbf{N}_0,\ i \in \mathbf{N}\right\}$ независимы и при фиксированном $n \in \mathbf{N}_0$ с. в. $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots$ одинаково распределены с распределением F_{n+1} и с. в. η_n имеет распределение G_{n+1}.

Пояснение к формальному определению

На языке ветвящихся процессов Z_n – численность частиц n-го поколения (без учета присоединившихся к этому поколению иммигрантов); η_n – число иммигрантов, присоединившихся к n-му поколению; $\xi_i^{(n)}$ – число непосредственных потомков i-ой частицы из совокупности, состоящей из частиц n-го поколения и присоединившихся к ним иммигрантов.

Пусть $Z_i^{(n)}$ при $i \geq n$ означает число потомков в i-ом поколении от частиц n-го поколения исходного процесса. Пусть

$$T^{(n)} = \min\left\{i \geq n : Z_i^{(n)} = 0\right\},$$

т.е. $T^{(n)}$ – момент вырождения исходного процесса, наступающий после прекращения миграции, начиная с момента n.

Цель работы

Нас интересует предельная теорема для процесса $\left\{ Z_{\lfloor nt \rfloor},\ t \in [0,1] \right\}$, рассматриваемого при условии, что $T^{(n)} < +\infty$.

Сопровождающее случайное блуждание

Положим при $i \in \mathbf{N}$

$$X_i = \ln f_i'(1), \quad \mu_i = g_i'(1), \quad \theta_i = f_i''(1) / \left(f_i'(1)\right)^2.$$

При этом считаем, что п.н.

$$f_i'(1), f_i''(1), g_i'(1) \in (0, +\infty).$$

Введем сопровождающее случайное блуждание:

$$S_0 = 0, \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Предположения относительно среды

Элементы последовательности Π независимы и одинаково распределены.

Предположения относительно шага

Предположение $\mathbf{A}$. *Процесс* $\{Z_i,\ i \in \mathbf{N}_0\}$ *является слабо надкритическим, т.е.* $\mathbf{E}X_1 > 0$ *и* $\mathbf{E}X_1 e^{-\beta X_1} = 0$ *при некотором* $\beta \in (0, 1)$.

Пусть $F(x)$ – функция распределения случайной величины X_1. Введем функцию распределения

$$F^{(\beta)}(x) = \gamma^{-1} \int_{-\infty}^{x} e^{-\beta u} dF(u), \qquad \gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta u} dF(u).$$

Предположение $\mathbf{B}$. *Распределение* $F^{(\beta)}(x)$ *принадлежит области притяжения некоторого устойчивого закона с индексом* $\alpha \in (1, 2]$ *и является нерешетчатым.*

Дополнительные предположения

Предположение $\mathbf{C}$. *Для некоторого* $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{E}\left[\left(\ln^+ \mu_1\right)^{\alpha+\varepsilon} \exp\left(-\beta X_1\right)\right] < +\infty.$$

Предположение $\mathbf{D}$. *Для некоторого* $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{E}\left[\left(\ln^+ \theta_1\right)^{\alpha+\varepsilon} \exp\left(-\beta X_1\right)\right] < +\infty.$$

Основные обозначения

Положим при $n \in \mathbf{N}_0$

$$a_n = e^{-S_n}, \qquad b_n = \sum\nolimits_{i=0}^{n-1} \mu_{i+1} a_i.$$

Введем случайный процесс

$$Y_n(t) = \frac{a_{\lfloor nt \rfloor}}{b_{\lfloor nt \rfloor}} Z_{\lfloor nt \rfloor}, \qquad t \in (0,1).$$

При $k \in \mathbf{N}$ отношение b_k / a_k равно математическому ожиданию Z_k при фиксированной среде Π.

Основная теорема

Теорема 1. Если выполнены предположения $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, то при $n \to \infty$

$$\left\{ Y_n(t)\,,\ t \in (0,1)\,;\ Z_n \mid T^{(n)} < +\infty \right\} \Rightarrow \{Y(t)\,,\ t \in (0,1)\,;\ Y\}\,,$$

где $\{Y(t)\,,\ t \in (0,1)\}$ – случайный процесс с положительными постоянными траекториями, Y – неотрицательная случайная величина, причем $Y > 0$ с положительной вероятностью (здесь имеется ввиду сходимость в смысле конечномерных распределений).

Функционалы сопровождающего блуждания

Положим при $n \in \mathbf{N}$

$$M_n = \max_{1 \le i \le n} S_i, \qquad L_n = \min_{0 \le i \le n} S_i$$

и

$$\tau_n = \min \{ i : S_i = L_n, \ 0 \le i \le n \} .$$

Первая вспомогательная теорема

Теорема 2. Если выполнены предположения $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, то при $n \to \infty$

$$\{Y_n(t),\ t \in (0,1);\ Z_n \mid \tau_n = n\} \Rightarrow \{U(t),\ t \in (0,1);\ U\},$$

где $\{U(t),\ t \in (0,1)\}$ – случайный процесс с положительными постоянными траекториями, U – неотрицательная случайная величина, причем $U > 0$ с положительной вероятностью.

Вторая вспомогательная теорема

Положим при $u \in (0, +\infty)$

$$A_n^{(u)} = \{L_n \geq 0,\ S_n \leq u\}.$$

Теорема 3. Если выполнены предположения $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и параметр $u \in (0, +\infty)$, то при $n \to \infty$

$$\left\{ Y_n^{(r)}(t),\ t \in (0,1);\ Z_n^{(r)} \,\middle|\, A_n^{(u)} \right\} \Rightarrow \left\{ V^{(r,u)}(t),\ t \in (0,1);\ V^{(r,u)} \right\},$$

где $\left\{ V^{(r,u)}(t), t \in (0,1) \right\}$ – случайный процесс с положительными постоянными траекториями, $V^{(r,u)}$ – неотрицательная случайная величина, причем $V^{(r,u)} > 0$ с положительной вероятностью (верхний индекс r означает, что исходный процесс начинается с r частиц).

Основное представление

Пусть $t \in (0,1)$ и A, B – борелевские множества числовой прямой. Положим

$$D_n(A,B) = \{Y_n(t) \in A,\ Z_n \in B\}.$$

Тогда при $K, L \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(D_n(A,B),\ T^{(n)} < +\infty\right) \\
=\ &\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\left(D_n(A,B),\ T^{(n)} < +\infty,\ \tau_n = k\right) \\
=\ &\sum_{k=0}^{K} + \sum_{k=K+1}^{n-L} + \sum_{k=n-L+1}^{n} = \Sigma_1(n,K) + \Sigma_2(n,K,L) + \Sigma_3(n,L).
\end{aligned}$$

Элементарные ветвящиеся процессы

Зафиксируем $i \in \mathbf{N}_0$ и обозначим $Z_{i,j}$ при $j \geq i$ число потомков в j-ом поколении от всех иммигрантов, присоединившихся к i-му поколению. Пусть

$$T_i = \min\{j \geq i : Z_{i,j} = 0\}.$$

Ясно, что

$$T^{(n)} = \max_{0 \leq i \leq n-1} T_i.$$

Важное неравенство

Положим

$$L_{k,n} = \min_{k \le i \le n} (S_i - S_k), \qquad T_{k,n} = \max_{k \le i \le n-1} T_i.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\left(T^{(n)} < +\infty,\ \tau_n = k\right) \\
= \ & \mathbf{P}\left(T^{(n)} < +\infty,\ \tau_k = k,\ L_{k,n} \ge 0\right) \\
\le \ & \mathbf{P}\left(T_{k,n} < +\infty,\ \tau_k = k,\ L_{k,n} \ge 0\right) \\
= \ & \mathbf{P}\left(\tau_k = k\right) \mathbf{P}\left(T^{(n-k)} < +\infty,\ L_{n-k} \ge 0\right).
\end{aligned}$$

Асимптотические формулы

При $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left(\tau_n = n\right) \sim c_1 \frac{\gamma^n}{n^{1+1/\alpha}},$$

$$\mathbf{P}\left(T^{(n)} < +\infty,\ L_n \geq 0\right) \sim c_2 \frac{\gamma^n}{n^{1+1/\alpha}}$$

где c_1, c_2 – положительные постоянные. Вторая формула следует из нижеследующего представления и леммы 1.

Разбивка второй вероятности

При $u > 0$

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{P}\left(T^{(n)} < +\infty,\ L_n \geq 0\ \right) \\
= \ & \mathbf{P}\left(T^{(n)} < +\infty,\ L_n \geq 0,\ S_n \leq u\ \right) + \mathbf{P}\left(\ldots,\ S_n > u\ \right) \\
= \ & P_1(n,u) + P_2(n,u)\,.
\end{aligned}
$$

Асимптотика элементов разбивки

Лемма 1. В условиях теоремы 1

$$\lim_{u\to\infty}\limsup_{n\to\infty} n^{1+1/\alpha}\gamma^{-n}P_2\left(n,u\right)=0,$$

$$\exists\ \lim_{u\to\infty}\limsup_{n\to\infty} n^{1+1/\alpha}\gamma^{-n}P_1\left(n,u\right)\in\left(0,+\infty\right).$$

Разбивка первого слагаемого

$$\Sigma_1(n,K) = \Sigma_{1,1}(n,K,u) + \Sigma_{1,2}(n,K,u),$$

где

$$\Sigma_{1,1}(n,K,u) = \sum_{k=0}^{K} \mathbf{P}\left(D_n(A,B),\ T^{(n)} < +\infty,\ \tau_n = k,\ S_n - S_k \le u\right),$$

$$\Sigma_{1,2}(n,K,u) = \sum_{k=0}^{K} \mathbf{P}\left(D_n(A,B),\ T^{(n)} < +\infty,\ \tau_n = k,\ S_n - S_k > u\right).$$

Некоторые пределы

Известно, что существует конечный положительный предел

$$c_3(u) := \lim_{n\to\infty} n^{1+1/\alpha}\gamma^{-n}\mathbf{P}\left(L_n \geq 0,\ S_n \leq u\right).$$

Положим $F_k(r,x) = \mathbf{P}\left(Z_k = r,\ \tau_k = k,\ b_k/a_k \leq x\right)$. Можно, показать, что существует конечный положительный предел

$$\begin{aligned} H_k(A,B) \quad : \quad &= \lim_{u\to\infty} c_3(u) \\ &\times \sum_{r=0}^{\infty}\int_0^{+\infty} \mathbf{P}^*\left(\frac{\Sigma_1^* V^{(r,u)}(t)}{\Sigma_1^* + x} \in A,\ V^{(r,u)} \in B\right) d_x F_k(r,x). \end{aligned}$$

Некоторые обозначения

Пусть $\mathcal{T}$ – момент вырождения обычного ВПСС, начинающегося с одной частицы. Положим

$$\delta = \mathbf{P}_{\Pi}\left(\mathcal{T} < +\infty\right).$$

Можно показать, что сходится ряд

$$L_1\left(A, B\right) := \sum_{j \in B} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\delta^{j}}{\gamma^{k}} H_k\left(A, j\right).$$

Асимптотика слагаемых разбивки

Из леммы 1 и представленных асимптотических формул вытекает, что

$$\lim_{K\to\infty}\lim_{u\to\infty}\lim_{n\to\infty} n^{1+1/\alpha}\gamma^{-n}\Sigma_{1,2}\left(n,K,u\right)=0.$$

Из теоремы 3 следует, что

$$\lim_{K\to\infty}\lim_{u\to\infty}\lim_{n\to\infty} n^{1+1/\alpha}\gamma^{-n}\Sigma_{1,1}\left(n,K,u\right)=L_1\left(A,B\right).$$

Асимптотика первого слагаемого

Лемма 2. В условиях теоремы 1

$$\lim_{K\to\infty}\lim_{n\to\infty} n^{1+1/\alpha}\gamma^{-n}\Sigma_1\left(n,K\right)=L_1\left(A,B\right).$$

Асимптотика второго слагаемого

Лемма 3. В условиях теоремы 1

$$\lim_{K,L\to\infty}\limsup_{n\to\infty} n^{1+1/\alpha}\gamma^{-n}\Sigma_2\left(n,K,L\right)=0.$$

Этот результат следует из леммы 1 и представленных асимптотических формул.

Некоторые обозначения

Положим

$$p_{r,j}(k) = \mathbf{P}_{\Pi}\left(Z_k = j \mid Z_0 = r\right),$$

$$c_{r,j}(k) = \mathbf{E}\left(p_{r,j}(k);\ L_k \geq 0\right).$$

Можно показать, что сходится ряд

$$L_2(A,B) := c_1 \sum_{j\in B}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{c_{r,j}(k)\,\mathbf{E}\delta^j}{\gamma^k}\mathbf{P}^*\left(U(t)\in A,\ U=r\right).$$

Асимптотика третьего слагаемого

Лемма 4. В условиях теоремы 1

$$\lim_{L\to\infty}\lim_{n\to\infty} n^{1+1/\alpha}\gamma^{-n}\Sigma_3(n,L) = L_2(A,B).$$

Из основного представления и асимптотик слагаемых следует, что

$$\lim_{n\to\infty} n^{1+1/\alpha}\gamma^{-n}\mathbf{P}\left(D_n\left(A,B\right),\ T^{(n)}<+\infty\right)=L_1\left(A,B\right)+L_2\left(A,B\right).$$

В частности, при $A=B=R_+$, где $R_+=[0,+\infty)$, находим, что

$$\lim_{n\to\infty} n^{1+1/\alpha}\gamma^{-n}\mathbf{P}\left(T^{(n)}<+\infty\right)=L_1\left(R_+,R_+\right)+L_2\left(R_+,R_+\right).$$

Откуда получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(D_n\left(A,B\right)\ \middle|\ T^{(n)}<+\infty\right)=\frac{L_1\left(A,B\right)+L_2\left(A,B\right)}{L_1\left(R_+,R_+\right)+L_2\left(R_+,R_+\right)},$$

Сходимость случайной среды

Положим при $u \in [-\infty, 0)$

$$A_n^{(u)} = \{M_n < 0,\ S_n \geq u\}.$$

Лемма 5. Если выполнено предложение $\mathbf{A}$, то для каждого $u \in [-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ при $n \to \infty$

$$\left\{ (Q_i, X_i, \mu_i),\ i \in \mathbf{N} \mid A_n^{(u)} \right\} \xrightarrow{D} \{(Q_i^*, X_i^*, \mu_i^*),\ i \in \mathbf{N}\},$$

$$\left\{ (Q_{n-i}, X_{n-i}, \mu_{n-i}), i \in \mathbf{N}_0; S_n \mid A_n^{(u)} \right\} \xrightarrow{D} \left\{ \left(Q_{-i}^*, X_{-i}^*, \mu_{-i}^*\right), i \in \mathbf{N}_0; S^* \right\}$$

причем последовательности в левых частях этих соотношений асимптотически независимы.

Новые случайные среды

Будем считать, что правые части определены на новом вероятностном пространстве $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathbf{P}^*)$ и независимы. При $u \in (0, +\infty)$ введем новую (двустороннюю) случайную среду $\Pi^* := \{Q_i^*,\ i \in \mathbf{Z}\}$, а при $u = -\infty$ введем новую (двустороннюю) случайную среду $\Pi^\bullet := \{Q_i^\bullet,\ i \in \mathbf{Z}\}$, где $Q_i^\bullet = Q_{-i+1}^*$ при $i \in \mathbf{Z}$. Характеристики среды, аналогичные характеристикам X_i, μ_i для среды Π, обозначим в первом случае X_i^*, μ_i^*, а во втором случае $X_i^\bullet, \mu_i^\bullet$ (и вместо S^* будем использовать $S^\bullet$). Положим $a^* = e^{-S^*}$ и $a^\bullet = e^{-S^\bullet}$.

Новые ветвящиеся процессы и сопровождающие блуждания

Для сред Π^* и $\Pi^\bullet$ вводятся сопровождающие случайные блуждания $\{S_i^*\}$ и $\{S_i^\bullet\}$, например,

$$S_i^* = \sum\nolimits_{j=1}^{i} X_i^*, \ i \geq 0; \qquad S_i^* = \sum\nolimits_{j=i+1}^{0} X_i^*, \ i < 0.$$

Положим $a_i^* = e^{-S_i^*}$ и $a_i^\bullet = e^{-S_i^\bullet}$ при $i \geq 0$. Наряду с i-ым элементарным ветвящимся процессом $Z_{i,j} = Z_{i,j}(\Pi)$ при $j \geq i$ рассмотрим новые ветвящиеся процессы $Z_{i,j}(\Pi^*)$ и $Z_{i,j}(\Pi^\bullet)$ при $j \geq i$.

Естественный мартингал

Положим $a^*_{i,j} = a^*_j / a^*_i$ при $j \geq i$ (аналогично определяется $a^\bullet_{i,j}$). При $i \geq 0$ существуют п.н. пределы

$$\lim_{j \to \infty} a^*_{i,j} Z_{i,j} \left(\Pi^*\right) := \zeta^*_i, \qquad \lim_{j \to \infty} a^\bullet_{i,j} Z_{i,j} \left(\Pi^\bullet\right) := \zeta^\bullet_i$$

причем $\mathbf{P}^* \left(\zeta^*_i > 0\right) > 0$ и $\mathbf{P}^* \left(\zeta^\bullet_i > 0\right) > 0$.

Случайные ряды

Введем случайные ряды

$$\Sigma_1^* = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_{i+1}^* a_i^*, \qquad \Sigma_2^* = a^* \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{-i+1}^* e^{S_{-i}^*},$$

$$\Sigma_3^* = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i^* a_i^*, \qquad \Sigma_4^* = \sum_{i=1}^{\infty} Z_{-i,0}\left(\Pi^*\right).$$

Аналогично вводятся ряды с заменой символа $*$ на символ $\bullet$.

Если выполнены предположения $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, то все указанные ряды сходятся $\mathbf{P}^*$-п.н.

Важные пределы

Положим $f_{l,0}(s) = f_l(f_{l-1}(\ldots f_1(s)))$ при $l \in \mathbf{N}$. Существует п.н. конечный предел

$$\lim_{l\to\infty} (f_{l,0}(s))^{a_i} := \varphi(s) \geq s.$$

Лемма 6. $\mathbf{P}^*$-п.н. существуют конечные пределы

$$\lim_{l\to\infty} f^*_{-l+1}\left(f^*_{-l+2}(\ldots f^*_0(s))\right)^{\exp\left(-S^*_i\right)} := \varphi^*(s) \geq s,$$

$$\lim_{l\to\infty} f^\bullet_{-l+1}\left(f^\bullet_{-l+2}(\ldots f^\bullet_0(s))\right)^{\exp\left(-S^\bullet_i\right)} := \varphi^\bullet(s) \geq s.$$

Уточненная формулировка теоремы 2

Теорема 2. Если выполнены предположения $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, то при $n \to \infty$

$$\left\{ Y_n(t),\ t \in (0,1);\ Z_n \mid \tau_n = n \right\} \Rightarrow \left\{ U(t),\ t \in (0,1);\ U \right\},$$

причем

$$U(t) = \varphi_1,\ t \in (0,1); \qquad U = \varphi_2 + \varphi_3.$$

Здесь $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – случайные величины, заданные на $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathbf{P}^*)$, и

$$\mathbf{E}^* e^{-\lambda \varphi_1} s_1^{\varphi_2} s_2^{\varphi_3} = \mathbf{E}^* e^{-\lambda \left(\Sigma_3^\bullet / \Sigma_1^\bullet \right)} \left(\varphi^\bullet(s_1) \right)^{\Sigma_3^\bullet / a^\bullet} s_2^{\Sigma_4^\bullet}.$$

Лемма 7. В условиях теоремы 2 при $n \to \infty$

$$\{a_i,\ i \in \mathbf{N}_0 \mid \tau_n = n\} \xrightarrow{D} a_i^{\bullet}$$

и для $t \in (0,1)$

$$\left\{ b_{\lfloor nt \rfloor}, b_n \;\middle|\; \tau_n = n \right\} \xrightarrow{D} \left(\Sigma_1^{\bullet}, \Sigma_1^{\bullet} + \Sigma_2^{\bullet} \right).$$

Важны крайние иммигранты

Лемма 8. В условиях теоремы 2

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{i=m}^{n-m-1} Z_{i,n} \geq \varepsilon \;\middle|\; \tau_n = n \right) = 0.$$

Вклад первых иммигрантов для $t \in (0,1)$

Лемма 9. В условиях теоремы 2 для $t \in (0,1)$ при $n \to \infty$

$$\left\{ a_{i,\lfloor nt \rfloor} Z_{i,\lfloor nt \rfloor},\ i \in \mathbf{N}_0 \;\middle|\; \tau_n = n \right\} \xrightarrow{D} \{\zeta_i^{\bullet},\ i \in \mathbf{N}_0\}.$$

Вклад последних иммигрантов для $t = 1$

Лемма 10. В условиях теоремы 2 при $n \to \infty$

$$\{Z_{n-i,n},\ i \in \mathbf{N} \mid \tau_n = n\} \stackrel{D}{\to} \{Z_{-i,0}(\Pi^\bullet),\ i \in \mathbf{N}\}.$$

Вклад первых иммигрантов для $t = 1$

Лемма 11. В условиях теоремы 2 при $n \to \infty$

$$\{Z_{i,n},\ i \in \mathbf{N}_0 \mid \tau_n = n\} \stackrel{D}{\to} \{\psi_i^\bullet,\ i \in \mathbf{N}_0\},$$

где $\psi_1^\bullet, \psi_2^\bullet, \ldots$ – неотрицательные целочисленные случайные величины, заданные на $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathbf{P}^*)$, причем при $i \in \mathbf{N}_0$

$$\mathbf{E}^* s^{\psi_i^\bullet} = \mathbf{E}^* \left(\varphi^\bullet(s)\right)^{a_i^\bullet \zeta_i^\bullet / a^\bullet},$$

$$\mathbf{E}^* s^{\sum_{j=0}^{i} \psi_j} = \mathbf{E}^* \left(\varphi^\bullet(s)\right)^{\sum_{j=0}^{i} a_i^\bullet \zeta_i^\bullet / a^\bullet}.$$

Доказательство теоремы 2 (1)

В силу леммы 8 достаточно рассматривать лишь иммигрантов, присоединившихся к первым и последним поколениям, т.е. (r можно считать достаточно большим)

$$Y_n(t) \approx \frac{a_{\lfloor nt \rfloor}}{b_{\lfloor nt \rfloor}} \Sigma(n,t),$$

$$Y_n(1) \approx \Sigma_1(n) + \Sigma_2(n),$$

где

$$\Sigma(n,t) = \sum_{i=0}^{r} Z_{i,\lfloor nt \rfloor}, \quad \Sigma_1(n) = \sum_{i=0}^{r} Z_{i,n}, \quad \Sigma_2(n) = \sum_{i=0}^{r} Z_{n-i,n}.$$

Доказательство теоремы 2 (2)

Заметим, что

$$\frac{a_{\lfloor nt\rfloor}}{b_{\lfloor nt\rfloor}}\Sigma(n,t)=\frac{1}{b_{\lfloor nt\rfloor}}\sum_{i=0}^{r}a_{i,\lfloor nt\rfloor}Z_{i,\lfloor nt\rfloor}a_i,$$

поэтому в силу лемм 7 и 9 при $n\to\infty$

$$\left\{\frac{a_{\lfloor nt\rfloor}}{b_{\lfloor nt\rfloor}}\Sigma(n,t)\;\middle|\;\tau_n=n\right\}\xrightarrow{D}\frac{1}{\Sigma_1^{\bullet}}\sum_{i=0}^{r}\zeta_i^{\bullet}a_i^{\bullet}\to\frac{\Sigma_3^{\bullet}}{\Sigma_1^{\bullet}}.$$

Доказательство теоремы 2 (3)

По лемме 11

$$\{\Sigma_1(n) \mid \tau_n = n\} \xrightarrow{D} \sum_{i=0}^{r} \psi_i^{\bullet} \to \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^{\bullet},$$

причем

$$\mathbf{E}^* s^{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i} = \mathbf{E}^* \left(\varphi^{\bullet}(s)\right)^{\Sigma_3^{\bullet}/a^{\bullet}}.$$

Доказательство теоремы 2 (4)

По лемме 10

$$\{\Sigma_2(n) \mid \tau_n = n\} \xrightarrow{D} \sum_{i=1}^{r} Z_{-i,0}(\Pi^\bullet) \to \Sigma_4^\bullet.$$

Из сказанного следует утверждение теоремы для $t \in (0,1)$, причем

$$\varphi_1 = \frac{\Sigma_3^\bullet}{\Sigma_1^\bullet},$$

и для $t = 1$, причем

$$\varphi_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^\bullet, \qquad \varphi_3 = \Sigma_4^\bullet.$$