

**ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ
ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ
В СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БАРЕНБЛАТТА-ЖЕЛТОВА-КОЧИНОЙ**

Солдатова Екатерина Александровна, Загребина Софья Александровна,
(Южно-Уральский государственный университет, Челябинск)
Келлер Алевтина Викторовна
(Воронежский государственный технический университет)

Геленджик, 2021.

Математическая модель Баренблатта – Желтова – Кочиной

$G \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с границей

∂G класса C^∞ , $d \in \mathbb{N}$.

Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной¹

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha \Delta u + f \quad (1)$$

с условием Дирихле

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial G \times \mathbb{R}_+ \quad (2)$$

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

и начальным условием Коши

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (3)$$

¹ Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикл. математика и механика. 1960. Т.24, № 5. С.58–73.

Детерминированные уравнения

$$L\dot{u} = Mu + f. \quad (4)$$

H. Poincare

С.Л. Соболев, R. Showalter,

В.Н. Врагов, А.И. Кожанов, С.Г. Пятков

Г.В. Демиденко, С.В. Успенский

A.Favini, A. Yagi

И.В. Мельникова

А.Г. Свешников, М.О. Корпусов, А.Б. Альшин, Ю.Д. Плетнер

Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев, Б.В. Логинов, А.В. Сеницын

Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков, М.В. Булатов, А.В. Келлер

Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева, А.А. Замышляева, С.А. Загребина, Н.А. Манакова и др.

Стохастические уравнения

$$Ldu = M u dt + N dW. \quad (5)$$

Da Prato G.

M. Kovacs , S. Larsson

И.В. Мельникова, А.И. Филингов, М.А. Альшанский

Ю.Е. Гликлик, Г.А. Свиридюк

А.А. Замышляева, С.А. Загребина, Н.А. Манакова

Детерминированное уравнение соболевского типа

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{C}\ell(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причем оператор M (L, p) -ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$

$$L\dot{u} = Mu + f, \quad (6)$$

- задача Коши

$$u(0) = u_0, \quad (7)$$

Теорема 1.^{2 3}

Пусть оператор $M(L, p)$ -ограничен. Тогда задача (6) и (7) однозначно разрешима для любых $f \in C^\infty((a, b); \mathfrak{F})$, причем решение имеет вид

$$u(t) = U^t u_0 + \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} (\mathbb{I} - Q) f(s) ds - \sum_{k=0}^p (M_0^{-1} L_0)^k M_0^{-1} (\mathbb{I} - Q) f^{(k)}(t), \quad (8)$$

если выполняется условие $u_0 \in \{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - P)u + \sum_{k=0}^p (M_0^{-1} L_0)^k M_0^{-1} (\mathbb{I} - Q) f^{(k)}(0) = 0\}$.

Здесь $U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu$.

² Свиридюк Г.И. К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. 1994. Т.49, № 4. С.47–74.

³ Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators // Utrecht; Keln; Tokyo: VSP, 2013.

Стохастическое уравнение соболевского типа

Винеровские K -процессы

Определение 1.

Символом $W = W(t)$ обозначим $\mathfrak{U}$ -значный винеровский K -процесс

$$W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \beta_k(t) \varphi_k, \quad t \in \overline{\mathbb{R}_+},$$

где $\{\beta_k(t)\}$ – последовательность независимых броуновских движений, $\{\lambda_k\}$ – последовательность собственных значений самосопряженного и положительно определенного ядерного оператора $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ ($\text{Tr} K < +\infty$), занумерованных по невозрастанию с учетом их кратности, а $\{\varphi_k\}$ – последовательность собственных векторов.

Свойства винеровского K -процесса:

(W1) $W(0) = 0$ почти всюду на Ω и, п.н. все траектории непрерывны на $\mathbb{R}_+$;

(W2) П.н. все траектории винеровского K -процесса недифференцируемы ни в одной точке $t \in \mathbb{R}_+$ и на любом промежутке имеют неограниченную вариацию.

Стохастическое уравнение соболевского типа

Положим $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – вещественные сепарабельные гильбертовы пространства,
 $L, M, N \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ ($\text{Tr} K < +\infty$), M – (L, p) -ограниченный, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

$$Ldu = M u dt + N dW, \quad (9)$$

$$QN = N. \quad (10)$$

$$u(0) = \xi_0, \quad (11)$$

где $\xi_0 \in \mathbf{L}_2$: $\xi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \xi_{0k} \varphi_k$, $D\xi_{0k} \leq C, k \in \mathbb{N}$.

Определение 2.

Случайный процесс $u \in \mathbf{CL}_2$ называется *решением задачи Коши*, если он удовлетворяет уравнению (9) с условием (11) при выполнении (10).

Стохастическое уравнение соболевского типа

Теорема 2.⁴

Пусть оператор M (L, p) -ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, и выполнено условие (10). Тогда для любой $\mathcal{U}$ -значной гауссовой независимой от винеровского K -процесса W случайной

величины $\xi_0 \in \mathbf{L}_2$, причем $\xi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \xi_{0k} \varphi_k$, $D\xi_{0k} \leq C$, существует единственное решение $u \in \mathbf{CL}_2$ задачи (9), (11), которое имеет вид

$$u(t) = L_1^{-1}NW(t) + U^t\xi_0 + \int_0^t U^{t-s}SL_1^{-1}NW(s)ds, \quad (12)$$

если выполняется $P\xi_0 = \xi_0$.

⁴ Солдатова, Е.А., Загребина С.А. Линейные уравнения соболевского типа с относительно p -ограниченными операторами и аддитивным белым шумом // Известия Иркутского гос. ун-та. Серия: Математика. – 2013. – Т. 6, № 1. – С. 20–34.

Численный метод Рунге – Кутты – Фельберга

$$(\lambda - \Delta_r)p_t = \alpha \Delta_r p + A \sin(\omega t), \quad (13)$$

$$|p(0, t)| < +\infty, \quad p(r_0, t) = 0, \quad p(r, 0) = p_0, \quad (14)$$

где $A \in \mathbb{R}$ выбирается случайным образом, $\lambda = 1/\eta$, η – специфическая характеристика трещиноватой породы,

$\alpha = \chi/\eta$, χ – коэффициент пьезопроводности трещиноватой породы⁵.

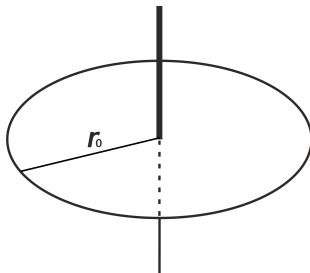


Рис. 1. Область $G \subset \mathbb{R}^2$ – круг радиуса r_0 с центром на оси скважины.

⁵ Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикл. математика и механика. 1960. Т.24, № 5. С.58–73.

Численный метод Рунге – Кутты – Фельберга

Проводя дискретизацию модели (28)–(29) приходим к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $p_j(t)$, которую запишем в матричном виде

$$M(\lambda) \frac{dP(t)}{dt} = \alpha L P(t) + W(t), \quad (15)$$

$$P(0) = P_0. \quad (16)$$

Здесь $M(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b_{21} & \lambda - b_{22} & \dots & -b_{2J-1} & -b_{2J} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_{J-1,1} & -b_{J-1,2} & \dots & \lambda - b_{J-1,J} & -b_{J-1,J} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_{J-1}(t) \\ p_J(t) \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} p_{01} \\ p_{02} \\ \vdots \\ p_{0J-1} \\ p_{0J} \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2J} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{J-1,1} & b_{J-1,2} & b_{J-1,3} & \dots & b_{J-1,J} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad W(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ A \sin(\omega t) \\ \vdots \\ A \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

Численный метод Рунге – Кутты – Фельберга

Для численного решения задачи Коши (30),(31) будем использовать идеи алгоритмов, основанные на явных одношаговых формулах типа Рунге – Кутты – Фельберга седьмого порядка точности следующего вида⁶:

$$U_{n+1} = U_n + \sum_{i=1}^{13} p_{mi} k_i, \quad (17)$$

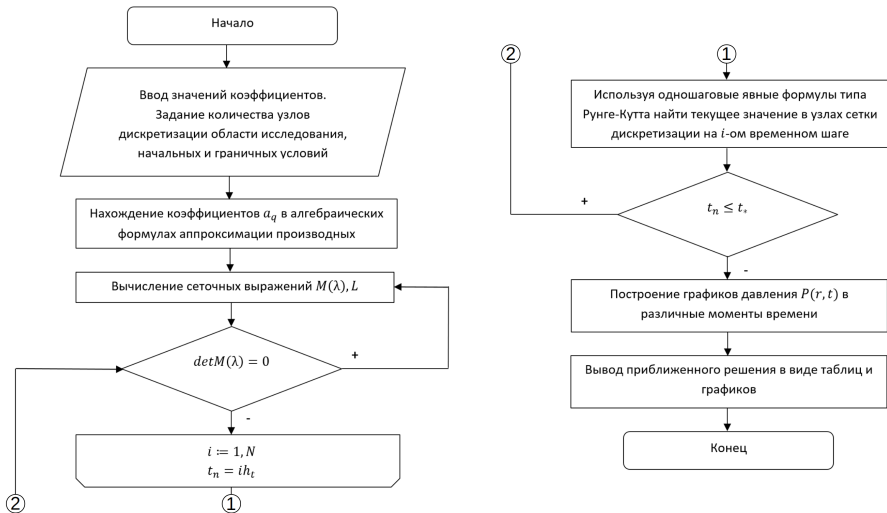
$$k_i = hF\left(t_n + \alpha_i h, \psi_n + \sum_{j=1}^{13} \beta_{ij} k_j, A_n + \sum_{j=1}^{13} \beta_{ij} k_j\right). \quad (18)$$

Здесь h_t – шаг интегрирования в способе Рунге – Кутты, Отметим, что локальную ошибку δ_n метода седьмого порядка точности можно вычислять по формуле

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{13} (p_{8i} - p_{7i}) k_i. \quad (19)$$

⁶Новиков, Е.А. Контроль устойчивости метода Фельберга седьмого порядка точности / Е.А. Новиков, Ю.В. Шорников // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11, № 4. – С. 65–72.

Обобщенная схема алгоритма численного метода на основе метода Рунге – Кутты – Фельберга



Вычислительный эксперимент

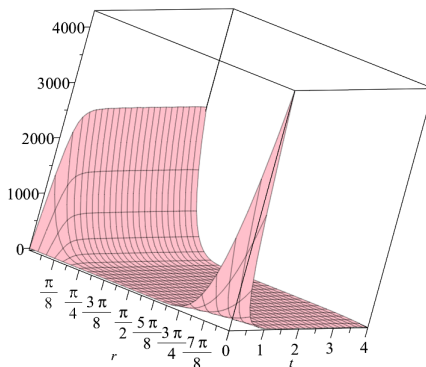
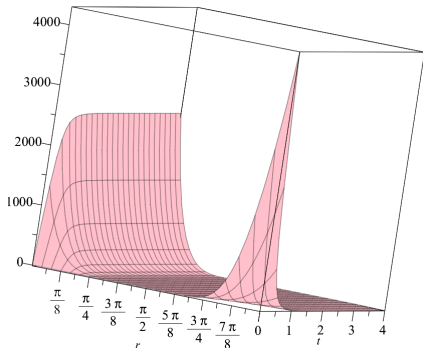
Внешнее воздействие $A \sin(\omega t)$, определяющее случайные нагрузки, влияющие на характеристики трещиновато-пористой среды. Начальное давление 5 MPa

$A = 77,261$, $\omega = 50\pi$,

Время счета 45,46 мин

$A = 77,358$ $\omega = 35\pi$

Время счета 47,77 мин

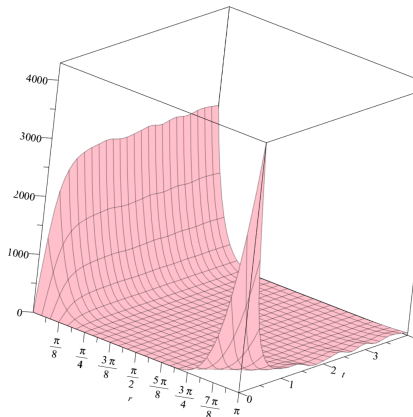


Вычислительный эксперимент

Внешнее воздействие $A \sin(\omega t)$, определяющее случайные нагрузки, влияющие на характеристики трещиновато-пористой среды. Начальное давление 5 МПа

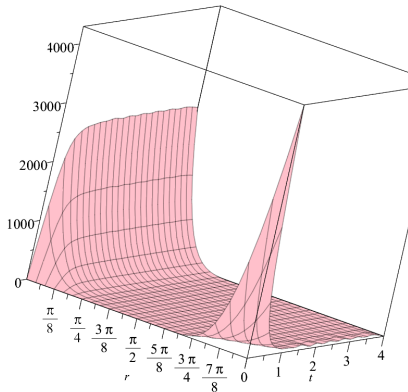
$A = 142,568$ $\omega = 50\pi$,

Время счета 52,75 мин



$A = 142,271$ $\omega = 35\pi$,

Время счета 86,86 мин



Вычислительный эксперимент

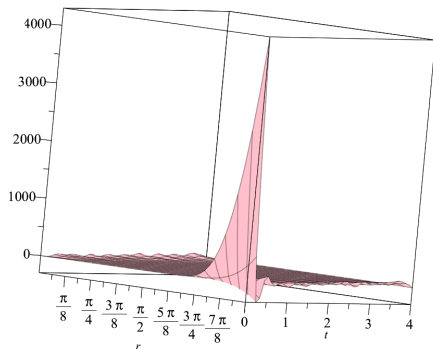
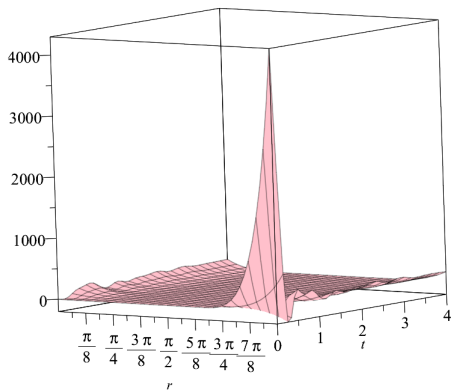
Внешнее воздействие $A \sin(\omega t)$, определяющее случайные нагрузки, влияющие на характеристики трещиновато-пористой среды. Начальное давление 5 МПа

$A = 242,539$ $\omega = 50\pi$

Время счета 71,68 мин

$A = 500,427$ $\omega = 35\pi$,

Время счета 59,45 мин



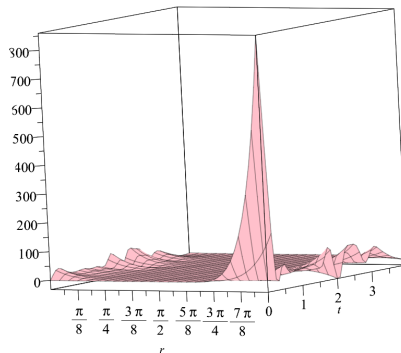
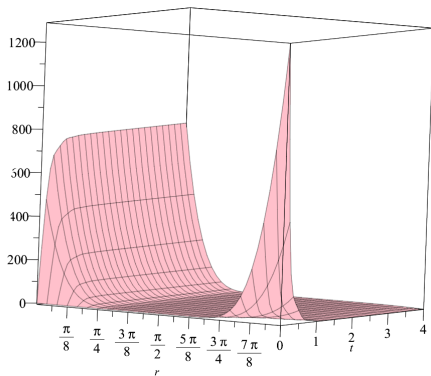
Вычислительный эксперимент

Внешнее воздействие $A \sin(\omega t)$, определяющее случайные нагрузки, влияющие на характеристики трещиновато-пористой среды. Начальное давление 1 MPa

$A = 0$ Время счета 36,89 мин

$A = 500, 427 \omega = 50\pi$,

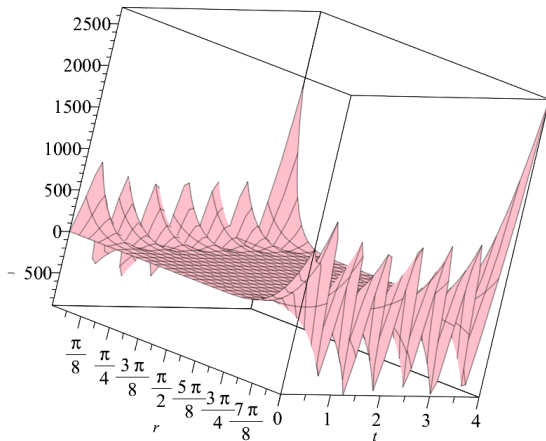
Время счета 150,60 мин



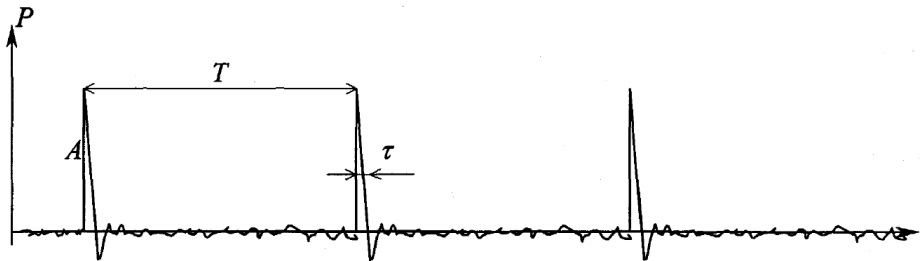
Вычислительный эксперимент

Внешнее воздействие $A \sin(\omega t)$, определяющее случайные нагрузки, влияющие на характеристики трещиновато-пористой среды. Начальное давление 1 MPa

$A = 5000,36$ $\omega = 17\pi$, Время счета 1830,88 мин



Импульсно-волновое воздействие



Вольницкая, Е.П. Гидродинамические методы анализа фильтрационных полей и свойств коллекторов сложного строения при импульсно-волновых воздействиях в скважине : дис... докт. техн. наук. / Е.П. Вольницкая. – Москва, 2005.

Импульсно-волновое воздействие

В последние годы эффективными признаны гидродинамические методы с использованием импульсного возбуждения скважин без отбора жидкости по колебаниям уровня воды в скважине. Заметим, что колебания уровня могут быть вызваны и другими факторами: землетрясением ⁷, импульсной регенерацией скважин ⁸, отдавливанием столба воды сжатым воздухом и последующей мгновенной разгерметизацией устья скважины ⁹, ¹⁰ и т.д. Результаты, полученные Башмаковым В.И. и др. методом колебаний, удовлетворительно согласуются с данными метода откачек, однако имеют перед последним значительные преимущества, обусловленные простотой и быстротой измерений, существенно меньшей стоимостью работ.

⁷ Рикитаке, Т. Предсказания землетрясений / Т. Рикитаке - М.: Мир, 1979. - 382 с.

⁸ Разработка методики применения импульсной и взрывной аппаратуры для интенсификации водозаборных скважин // Отчет ВНИПИ взрывгеофизики, рук. Вольницкая Э.М. - ГР 01825056819. - Раменское, 1984. - 91 с.

⁹ Башмаков, В.И. Исследование водоносных горизонтов методом колебаний / В.И. Башмаков, Б.В. Боровский, Г.С. Вартанян и др. // Водные ресурсы. 1986. № 2. С. 31-39.

¹⁰ Богданов, В.Е. Комплексная технология обработки пластов и очистки забоев водозаборных скважин районов нечерноземья глубинными пневмоимпульсными устройствами : дис... канд. техн. наук. / В.Е. Богданов. - Раменское, 1991.

Спасибо за внимание!