Моментные характеристики случайного отображения с ограничениямими на размеры компонент

А.Л. Якымив (Математический институт им. В.А. Стеклова)

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathfrak{S}_n$ - полугруппа отображений множества X из n элементов в себя. Каждому отображению $\omega(\cdot) \in \mathfrak{S}_n$ ставится в соответствие граф $\Gamma(X, \sigma)$, вершины которого $x, y \in X$ соединены дугой (x, y), если $y = \omega(x)$. Как известно, каждый граф $\Gamma(X, \omega)$ состоит из связных компонент, каждая из которых состоит из одного цикла и деревьев. Корнями деревьев являются вершины контура, называемые циклическими элементами.

Пусть D –непустое подмножество множества натуральных чисел N и $D(t) = D \cap [1, t]$ при $t \geq 1$. Рассматривается некоторый класс множеств D, имеющих положительную асимптотическую плотность $\varrho = \varrho(D)$ во множестве натуральных чисел, т.е. таких, для которых существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|D(n)|}{n} = \varrho = \varrho(D) > 0 \qquad (1.1)$$

(здесь и далее $|B|$ есть число элементов конечного множества B).

Рассматривается совокупность $\mathfrak{S}_n(D)$ отображений из $\mathfrak{S}_n$, размеры компонент которых принадлежат множеству $D \subseteq N$. Пусть случайное отображение $\sigma_n = \sigma_n(D)$ равномерно распределено на $\mathfrak{S}_n(D)$. Через ζ_{mn} обозначим число компонент случайного отображения σ_n, имеющих объём $m \in N$. Пусть ζ_n есть общее число компонент случайного отображения σ_n, то есть

$$\zeta_n = \sum_{m \in N} \zeta_{mn} = \sum_{m \in D(n)} \zeta_{mn},$$

Через $\pi(i)$ обозначим случайную величину, имеющую пуассоновское распределение с параметром i. Положим

$$g(i) = \mathsf{P}\{\pi(i) < i\}. \tag{1.2}$$

Известно - см., например Y (2019) формула (5.1), что

$$\mathbf{E}t^{\zeta_n} = \frac{1}{p(n)}[z^n]\exp\left(ta(z)\right), \tag{1.3}$$

где $t, z \in (0,1)$,

$$p(n) = [z^n]\exp(a(z)),$$

$$a(z) = \sum_{i \in D} \frac{z^i g(i)}{i}.$$

Здесь $[z^n]f(z)$ есть коэффициент при z^n в разложении аналитической в окрестности нуля функции $f(z)$ по степеням z. Также нам удобно будет далее считать, что $p(0) = 1$ и $p(t) = 0$ при $t < 0$.

В основополагающей работе Б. Харриса (1960) показано, что если $D = N$, то $\mathbf{E}\zeta_n = (\ln n)/2 + O(1)$ при $n \to \infty$. Отметим также работу Е. Манставичюса (2016), в которой получен аналог для случайных отображений известного в вероятностной теории чисел неравенства Турана-Кубилюса (1936, 1964, 1983). Отсюда, в частности, следует правильная по порядку оценка для дисперсии случайной величины ζ_n. Основной результат настоящего доклада можно рассматривать как уточнение и/или обобщение этих утверждений.

Эта же задача для случайных подстановок и случайных ансамблей рассмотрена в работах Манставичюса и его учеников (2017, 2018) и докладчика (2020), а также в приведённой в них литературе.

Основной результат

Далее мы будем рассматривать следующие два класса множеств D.

Определение 1

Будем говорить, что множество D принадлежит классу F_1, если $D = \bigcup_{i=1}^{M} D_i$, где $M \in N,\ D_i = \{m \in N:\ m = a_i k + b_i,\ k = 0, 1, 2, \dots\}$ и целые $a_i > 1,\ 1 \le b_i \le a_i - 1,\ (a_i, b_i) = 1$, причём прогрессии D_i и D_j при $i \ne j$ не пересекаются.

Определение 2

Будем говорить, что множество D принадлежит классу F_2, если $D = \{m \in N : \; m/k_i \notin N, \; i = 1, \ldots, s\}$ для некоторых $s \in N$ и $k_1, \ldots, k_s \in N$ таких, что $k_i \geq 2, \; i = 1, \ldots, s$ и $(k_i, k_j) = 1$ при $i \neq j$.

Пример

Может показаться неочевидным существование большого числа взаимно непрересекающихся прогрессий $D_i,\ i = 1, \ldots, M$ с различными a_i, объединение которых принадлежит классу F_1. Поэтому приведём следующий пример.

$$D_1 = \{m \in N: \ m = 1 + 5k, \ k = 0, 1, 2, \ldots\},$$

$$D_2 = \{m \in N: \ m = 2 + 15k, \ k = 0, 1, 2, \ldots\},$$

$$D_3 = \{m \in N: \ m = 3 + 20k, \ k = 0, 1, 2, \ldots\},$$

$$D_4 = \{m \in N: \ m = 4 + 25k, \ k = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Как нетрудно заметить, прогресси D_1, D_2, D_3, D_4 принадлежит классу F_1 и попарно взаимно не пересекаются.

Для $x \in (0,1)$ и $\gamma \in (-\infty, \infty)$ обозначим

$$f_\gamma(x) = (1-x)^{-\gamma} - 1, \quad u_\gamma(x) = (1-x)^{-\gamma}$$

и положим при $\alpha = 1 - \varrho/2$ и $h(i) = g(i) - 1/2$

$$J_0 = \sum_{m,k \in D(n-1),\ m+k<n} \frac{1}{mk} u_\alpha\left(\frac{m+k}{n}\right)$$

$$- \sum_{m,k \in D(n-1),\ m+k<n} \frac{1}{mk} u_\alpha\left(\frac{m+k}{n} - \frac{mk}{n^2}\right),$$

$$J_1 = \sum_{m,k \in D(n-1),\ m+k \ge n} \frac{1}{mk} u_\alpha\left(\frac{m}{n}\right) u_\alpha\left(\frac{k}{n}\right),$$

$$l(n) = \sum_{i \in D(n)} \frac{1}{i},\ c = \sum_{i \in D} h(i).$$

Теорема 1 *Пусть* $D \in F_1 \cup F_2$. *Найдется число* $\beta \in (0, 1/2]$ *такое, что*

$$\mathbf{E}\zeta_n = \frac{1}{2}l(n) + \sigma(n) + c + O\left(\frac{\ln n}{n^\beta}\right) \qquad (2.2)$$

при $n \to \infty$, *где*

$$\sigma(n) = \frac{1}{2}\sum_{m \in D(n-1)} \frac{1}{m} f_\alpha\left(\frac{m}{n}\right) \to \frac{\varrho}{2}\int_0^1 \frac{f_\alpha(x)}{x}\,dx. \qquad (2.3)$$

Кроме того, справедливо представление

$$\mathbf{D}\zeta_n = \mathbf{E}\zeta_n + \frac{1}{4}J_0 + \frac{1}{4}J_1 + O(n^{-\beta}\ln^2 n), \qquad (2.4),$$

причем при $n \to \infty$

$$J_0 = O(\ln^\alpha n),$$

$$J_1 \to \varrho^2 \int_{(x,y)\in(0,1)^2 : x+y\geq 1} (1-x)^{-\alpha}(1-y)^{-\alpha}\frac{dx\,dy}{xy} < \infty.$$

Следствие 1 *В предположениях теоремы 1 при* $n \to \infty$

$$\mathbf{D}\zeta_n \sim \mathbf{E}\zeta_n \sim \frac{\varrho}{2}\ln n.$$

Вспомогательные утверждения

В этом разделе для удобства ссылок мы приведем ряд вспомогательных утверждений, часть из которых уже известна.

Лемма 1 *Справедливы представления*

$$\mathbf{E}\zeta_n = \sum_{m\in D} \frac{p(n-m)g(m)}{mp(n)}, (3.1)$$

$$\mathbf{E}\zeta_n(\zeta_n - 1) = \sum_{m,k\in D} \frac{p(n-m-k)g(m)g(k)}{mkp(n)}. (3.2)$$

Из этой леммы очевидным образом вытекает следующее представление для дисперсии случайной величины ζ_n, которое служит отправной точкой для наших последующих оценок.

Следствие 2

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}\zeta_n &= \mathbf{E}\zeta_n + \mathbf{E}\zeta_n(\zeta_n - 1) - (\mathbf{E}\zeta_n)^2 \\
&= \mathbf{E}\zeta_n + \sum_{m,k\in D} \frac{p(n-m-k)g(m)g(k)}{mkp(n)} - (\mathbf{E}\zeta_n)^2 \\
&= \mathbf{E}\zeta_n + \sum_{m,k\in D} \frac{p(n-m-k)g(m)g(k)}{mkp(n)} \\
&\quad - \sum_{m,k\in D} \frac{p(n-m)p(n-k)g(m)g(k)}{mkp^2(n)}.
\end{aligned}$$

Лемма 2 *Зафиксируем* $\mu > 0$. *Справедливо* *неравенство:*

$$\sum_{m,k\in D,\ m+k<n} \frac{1}{mk}\left(1-\frac{m+k}{n}\right)^{-\mu}$$

$$\leq 3^{\mu}\ln^2 n + \frac{6}{n^{1-\mu}}\ln n \sum_{i=1}^{n} i^{-\mu}.$$

Лемма 3 *Пусть* $D \in F_1 \cup F_2$. *Найдутся числа* $\alpha \in (0,1/2]$ *и* $\beta \in (0,1/2]$ *такие, что при* $n \to \infty$

$$p(n) = Cn^{\alpha-1}\left(1+O\left(n^{-\beta}\right)\right), (3.3)$$

где $C = C(D) > 0$. *При этом асимптотическая плотность множества* D *существует и равна* $\varrho = 2\alpha$.

Зафиксируем $s \in N$. Пусть $v_n(\cdot)$ – некоторая последовательность функций, действующих из $[0, n]^s$ в $[0, \infty)$. Для произвольного множества $V \subseteq \Delta = [0, 1]^s$ положим

$$I_V(n) = \sum_{\mathbf{i} \in (D(n-1))^s \cap nV} v_n(\mathbf{i})$$

Также через $\overline{V}$ будем обозначать замыкание множества V.

Лемма 4 *Предположим, что множество D обладает положительной асимптотической плотностью ϱ во множестве натуральных чисел, т.е. выполнено условие (1.1), и*

$$v_n(n\mathbf{z}) = n^r v(\mathbf{z})(3.4)$$

для всех $\mathbf{z} \in K$ и некоторого действительного r, где функция $v(\cdot)$ непрерывна на компакте $K \subseteq \Delta$. Тогда

$$I_K(n) = n^{s+r} \varrho^s \int_K v(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} + o(n^{s+r}) \quad (3.5)$$

при $n \to \infty$.

Лемма 5 *Пусть выполнено условие (1.1) и U - некоторая открытая область из Δ. Предположим, что соотношение (3.4) имеет место для всех $\mathbf{z} \in U$ и некоторой непрерывной в U функции $v(\cdot)$, причём $\int_U v(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} < \infty$. Пусть*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \to \infty} n^{-s-r} I_{U_\varepsilon}(n) = 0, \quad (3.6)$$

где $U_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in U : \inf_{\mathbf{y} \in \partial U} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \le \varepsilon\}$, ∂U есть граница U. Тогда

$$I_{\overline{U}}(n) = n^{s+r} \varrho^s \int_U v(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} + o(n^{s+r})(3.7)$$

при $n \to \infty$.

Лемма 6 *Для чисел $g(i)$, определённых в (1.2), справедливо неравенство:*

$$\left| g(i) - \frac{1}{2} \right| \le \frac{8}{\sqrt{i}}\ \forall i \in N.$$

Лемма 7 *Имеет место неравенство:*

$$\int_{(x,y) \in (0,1)^2 : x+y \ge 1} (1-x)^{-\alpha} (1-y)^{-\alpha} \frac{dx\, dy}{xy} < \infty.$$

Лемма 8 *Положим* $h(m) = g(m) - 1/2$, *где последовательность* $g(m)$ *определена равенством (1.2). В предположениях теоремы 1 справедливо соотношение:*

$$\sum_{m \in D(n)} \frac{p(n-m)}{mp(n)} h(m) = \sum_{n \in D} \frac{h(m)}{m} + O(n^{-\beta}) \quad (3.9)$$

при $n \to \infty$ *(ряд в правой части (3.9) сходится согласно лемме 6).*

О доказательствах вспомогательных утверждений

Соотношения (3.1) и (3.2) леммы 1 следуют из равенств (2.2) и (2.5) работы Манставичюса (2017). Они могут быть получены также непосредственно из (1.3) путём двухкратного дифференцирования по t.

Лемма 2 следует из оценок, которые проведены в статье докладчика (2020) сразу после соотношения (5.2).

Утверждение леммы 3 в случае, когда $D \in F_1$, доказывается аналогично теореме 1 из работы А.И. Павлова (1997). В случае $D \in F_2$, доказательство проводится аналогично теореме 2 этой же статьи.

Лемма 4 доказана в статье докладчика (2020).

Доказательство леммы 5. Для $V_\varepsilon = \overline{U \backslash U_\varepsilon}$ имеем:

$$I_{\overline{U}}(n) \leq I_{U_\varepsilon}(n) + I_{V_\varepsilon}(n).$$

Отсюда, полагая $s + r = h$ и используя лемму 4, получаем:

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} n^{-h} I_{\overline{U}}(n) &\leq \limsup_{n\to\infty} n^{-h} I_{U_\varepsilon}(n) + \limsup_{n\to\infty} n^{-h} I_{V_\varepsilon}(n) \\ &= \limsup_{n\to\infty} n^{-h} I_{U_\varepsilon}(n) + \varrho^s \int_{V_\varepsilon} v(\mathbf{z})\, d\mathbf{z}. \end{aligned}$$

Устремляя в полученном соотношении ε к нулю и учитывая равенства (3.5) и (3.6), заключаем, что

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-h} I_{\overline{U}}(n) \leq \varrho^s \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{V_\varepsilon} v(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} = \varrho^s \int_U v(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} < \infty \quad (4.1)$$

(последний интеграл существует в силу условий леммы 5). Поскольку

$$I_{\overline{U}}(n) \geq I_{V_\varepsilon}(n),$$

то согласно лемме 4

$$\liminf_{n\to\infty} n^{-h} I_{\overline{U}}(n) \geq \lim_{n\to\infty} n^{-h} I_{V_\varepsilon}(n) = \varrho^s \int_{V_\varepsilon} v(\mathbf{z})\, d\mathbf{z}.$$

Устремляя в последнем неравенстве ε к нулю, получаем, что

$$\liminf_{n\to\infty} n^{-h} I_{\overline{U}}(n) \geq \lim_{\varepsilon\to 0} \varrho^s \int_{V_\varepsilon} v(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} = \varrho^s \int_{U} v(\mathbf{z})\, d\mathbf{z}. \quad (4.2)$$

Объединяя оценки (4.1) и (4.2), приходим к (3.7). Лемма 5 доказана.

Лемма 6 доказана в статье Хансен (1989).

Доказательство леммы 7. Справедлива цепочка неравенств:

$$\int_{(x,y)\in(0,1)^2:x+y\geq 1}(1-x)^{-\alpha}(1-y)^{-\alpha}\frac{dx\,dy}{xy}$$

$$=2\int_{(x,y)\in(0,1)^2:x+y\geq 1,\ x\leq y}(1-x)^{-\alpha}(1-y)^{-\alpha}\frac{dx\,dy}{xy}$$

$$\leq 4\int_{(x,y)\in(0,1)^2:x+y\geq 1,\ x\leq y}(1-x)^{-\alpha}(1-y)^{-\alpha}\frac{dx\,dy}{x}$$

$$=4\int_0^1(1-x)^{-\alpha}\frac{1}{x}\,dx\int_{\max(x,1-x)}^1(1-y)^{-\alpha}\,dy$$

$$\leq 4\int_0^1(1-x)^{-\alpha}\frac{1}{x}\,dx\int_{1-x}^1(1-y)^{-\alpha}\,dy$$

$$= 4 \int_0^1 (1-x)^{-\alpha} \frac{1}{x} \, dx \int_0^x z^{-\alpha} \, dz$$

$$= \frac{4}{1-\alpha} \int_0^1 (1-x)^{-\alpha} \frac{x^{1-\alpha}}{x} \, dx = \frac{4}{1-\alpha} \int_0^1 (1-x)^{-\alpha} x^{-\alpha} \, dx < \infty.$$

Лемма 7 доказана.

Доказательство леммы 8. В силу леммы 3,

$$\sum_{m \in D(n)} \frac{p(n-m)}{mp(n)} h(m) = \frac{h(n)}{np(n)} + \sum_{m \in D(n-1)} u_\alpha\left(\frac{m}{n}\right) \frac{h(m)}{m}$$

$$+ O(n^{-\beta}) \sum_{m \in D(n-1)} u_{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{n}\right) \frac{|h(m)|}{m}$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{3/2}p(n)}\right) + \Lambda_1 + O(n^{-\beta})\Lambda_2. \qquad (4.3)$$

Далее,

$$\Lambda_1 = \sum_{m\in D(n-1)} u_\alpha\left(\frac{m}{n}\right)\frac{h(m)}{m} = \sum_{m\in D(n-1)} \frac{h(m)}{m} + \sum_{m\in D(n-1)} f_\alpha\left(\frac{m}{n}\right)\frac{h(m)}{m}$$

$$= \sum_{m\in D(n-1)} \frac{h(m)}{m} + \left(\sum_{m\in D(n/2)} + \sum_{m\in D(n-1)\setminus D(n/2)}\right) f_\alpha\left(\frac{m}{n}\right)\frac{h(m)}{m}$$

$$= \sum_{m\in D(n-1)} \frac{h(m)}{m} + \Lambda_1' + \Lambda_1''. \qquad (4.4)$$

В свою очередь,

$$|\Lambda_1'| \le \sum_{m \in D(n/2)} f_\alpha\left(\frac{m}{n}\right)\frac{|h(m)|}{m} = O(1)\sum_{m \in D(n/2)} \frac{m}{n}\frac{|h(m)|}{m}$$

$$= O\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{m \in D(n/2)} |h(m)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad (4.5)$$

согласно лемме 6. Кроме этого,

$$|\Lambda_1''| \le \sum_{m \in D(n-1)\setminus D(n/2)} f_\alpha\left(\frac{m}{n}\right)\frac{|h(m)|}{m}$$

$$\le \max_{m \ge n/2} \frac{|h(m)|}{m} \sum_{m \in (n/2, n-1]} u_\alpha\left(\frac{m}{n}\right)$$

$$= O(n^{-3/2}) \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^{-\alpha} = O(n^{-3/2}) n^{\alpha} n^{1-\alpha} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{4.6}$$

Из соотношений (4.4), (4.5) и (4.6) следует, что

$$\Lambda_1 = \sum_{m \in D(n-1)} \frac{h(m)}{m} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \sum_{m \in D} \frac{h(m)}{m} + \sum_{m \in D, m \geq n} \frac{h(m)}{m} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \sum_{m \in D} \frac{h(m)}{m} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{4.7}$$

Далее, при $\mu = \alpha + \beta$ имеем:

$$\Lambda_2 = \sum_{m \in D(n-1)} u_\mu \left(\frac{m}{n}\right) \frac{|h(m)|}{m}$$

$$= \left(\sum_{m \in D(n/2)} + \sum_{m \in D(n-1) \setminus D(n/2)} \right) u_\mu \left(\frac{m}{n}\right) \frac{|h(m)|}{m} = \Lambda_2' + \Lambda_2''.$$

В свою очередь,

$$\Lambda_2' = \sum_{m \in D(n/2)} u_\mu \left(\frac{m}{n}\right) \frac{|h(m)|}{m}$$

$$= O(1) \sum_{m \in D(n/2)} \frac{|h(m)|}{m} = O(1).$$

Кроме этого,

$$\Lambda_2'' = \sum_{m \in D(n-1)\setminus D(n/2)} u_\mu\left(\frac{m}{n}\right)\frac{|h(m)|}{m}$$

$$= O(n^{-3/2}) \sum_{m \in D(n-1)\setminus D(n/2)} u_\mu\left(\frac{m}{n}\right)$$

$$= O(n^{-3/2}) \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{m}{n}\right)^{-1} = O(n^{-3/2})n \ln n = O(n^{-1/2} \ln n),$$

так как $\mu = \alpha + \beta = 1 - \varrho/2 + \beta \leq 1$. Поэтому

$$\Lambda_2 = O(1). \tag{4.8}$$

Из (4.3), (4.7) и (4.8) получаем, что

$$\sum_{m \in D(n)} \frac{p(n-m)}{mp(n)} h(m) = O\left(\frac{1}{n^{3/2}p(n)}\right) + \sum_{m \in D} \frac{h(m)}{m} + O(n^{-1/2}) + O(n^{-\beta})$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{1/2+\varrho/2}}\right) + \sum_{m \in D(n-1)} \frac{h(m)}{m} + O(n^{-1/2}) + O(n^{-\beta})$$

$$= \sum_{m \in D} \frac{h(m)}{m} + O(n^{-\beta}),$$

так как $\beta \leq 1/2$. Лемма доказана.