Достаточные условия единственности максимума задачи оптимизации в рамках стохастической модели с приоритетами, зависящими от одной случайной величины

Н. Неумержицкая, С. Углич, Т. Волосатова

ДГТУ, Ростов-на-Дону

Пусть (Ω, F, P) некоторое вероятностное пространство. Рассматривается проблема оптимизации взаимодействия трех учреждений, действующих в рамках единой организации и «арбитра», заинтересованно в наилучшем результате деятельности организации, и действующего на основе некоторых вероятностных оценок.

Поставленная задача может быть сведена к исследованию на максимум следующей функции

$$F(u_1, u_2, u_3) = E\left(u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} u_3^{\alpha_3}\right), \tag{1}$$

$u_1 > 0, u_2 > 0, u_3 > 0,$

Где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – случайные величины, принимающие значения на интервале (0, 1), E является математическим ожиданием относительно вероятности P. $u_3 = -c_1 u_1 - c_2 u_2 + c_3$, и c_1, c_2, c_3 строго положительны.

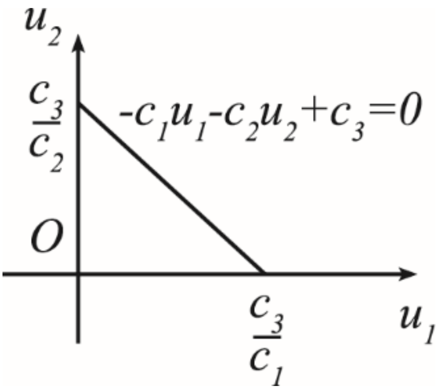

Рис. 1

Областью определения функции является треугольник, показанный на Рис. 1. Причем на границах области целевая функция обращается нуль.

$$D:\begin{cases} u_1 \geq 0 \\ u_2 \geq 0 \\ c_1 u_1 + c_2 u_2 \leq c_3 \end{cases} \qquad (2)$$

Целевая функция может быть представлена в виде:

$$F(u_1, u_2) := F(u_1, u_2, -c_1 u_1 - c_2 u_2 + c_3) \qquad (3)$$

Эта функция непрерывна, дважды непрерывно дифференцируема и строго положительна во внутренних точках области определения, на границах она обращается в нуль. В этом случае можно утверждать, что во внутренней части области существует хотя бы одна точка максимума.

Пусть $\alpha_i = f_i(x), i = 1,2,3$, $0 \le f_i(x) \le 1$.

Здесь x – равномерно распределенная случайная величина $x \in (0,1)$.

Задача сводится к изучению свойств функции F.

$$F(u_1, u_2) = \int_0^1 u_1^{f_1(x)} u_2^{f_2(x)} (-c_1 u_1 - c_2 u_2 + c_3)^{f_3(x)} dx. \tag{4}$$

Как было показано выше, целевая функция имеет хотя бы одну точку максимума. Докажем ее единственность.

Введем обозначения:

$$\varphi(u_1, u_2, x) = u_1^{f_1(x)} u_2^{f_2(x)} (-c_1 u_1 - c_2 u_2 - c_3)^{f_3(x)}.$$

$$\varphi_i(u_1, u_2) = \int_0^1 f_i(x) \varphi(u_1, u_2, x) dx\, , i = 1,2,3,$$

$$\varphi_{ij}(u_1, u_2) = \int_0^1 f_i(x) f_j(x) \varphi(u_1, u_2, x) dx\, , i, j = 1,2,3$$

Теперь целевая функция принимает вид

$$F(u_1, u_2) = \int_0^1 \varphi(u_1, u_2, x) dx. \tag{5}$$

Лемма 1. Точка $(u_1, u_2) \in D$ является стационарной для функции F если выполняются соотношения:

$$\begin{gathered} u_3 = c_1 u_1 \frac{\varphi_3}{\varphi_1}, \\ u_3 = c_2 u_2 \frac{\varphi_3}{\varphi_2}. \end{gathered} \tag{6}$$

Вычислим вторые производные

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} &= \frac{1}{u_1^2}(\varphi_{11} - \varphi_1) - \frac{2c_1}{u_1 u_3}\varphi_{13} + \frac{c_1^2}{u_3^2}(\varphi_{33} - \varphi_3), \\
\frac{\partial^2 F}{\partial u_2^2} &= \frac{1}{u_2^2}(\varphi_{22} - \varphi_2) - \frac{2c_2}{u_2 u_3}\varphi_{23} + \frac{c_2^2}{u_3^2}(\varphi_{33} - \varphi_3), \\
\frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial u_2} &= \frac{1}{u_1 u_2}\varphi_{12} - \frac{c_1}{u_2 u_3}\varphi_{23} - \frac{c_2}{u_1 u_3}\varphi_{13} + \frac{c_1 c_2}{u_3^2}(\varphi_{33} - \varphi_3).
\end{aligned} \tag{7}$$

После некоторых преобразований получаем:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2}\right)_0 = -\frac{1}{u_1^2}(\varphi_1 - \varphi_{11}) - \frac{2}{u_1^2}\frac{\varphi_1 \varphi_{13}}{\varphi_3} - \frac{1}{u_1^2}\frac{\varphi_1^2}{\varphi_3^2}(\varphi_3 - \varphi_{33}), \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_2^2}\right)_0 = -\frac{1}{u_2^2}(\varphi_2 - \varphi_{22}) - \frac{2}{u_2^2}\frac{\varphi_2\varphi_{23}}{\varphi_3} - \frac{1}{u_2^2}\frac{\varphi_2^2}{\varphi_3^2}(\varphi_3 - \varphi_{33}),$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial u_2}\right)_0 = \frac{\varphi_{12}}{u_1 u_2} - \frac{1}{u_1 u_2}\frac{\varphi_1\varphi_{23}}{\varphi_3} - \frac{1}{u_1 u_2}\frac{\varphi_2\varphi_{13}}{\varphi_3} - \frac{1}{u_1 u_2}\frac{\varphi_1\varphi_2}{\varphi_3^2}(\varphi_3 - \varphi_{33}).$$

Вычислим в стационарной точке определитель

$$\varDelta = u_1^2 u_2^2 \varphi_3^2 \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial u_2}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial u_2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_2^2}\right)_0 \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Отметим, что

$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2}\right)_0 < 0$ и $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_2^2}\right)_0 < 0$

В этом случае, для того, чтобы рассматриваемая стационарная точка была точкой максимуму достаточно чтобы $\varDelta > 0$.

Отметим, что при $\alpha_i = const$, $\Delta > 0$. Это было доказано в предыдущих работах.

Предположение 1. Рассмотрим числа $a_i (0 < a_i < 1, i = 1,2,3)$ и пусть $\varepsilon \leq 0{,}05 \min a_i$ если $a_i - \varepsilon \leq f_i \leq a_i + \varepsilon$ тогда $\Delta > 0$.

Предположение 2. 1) Если две функции из $f_i, i = 1,2,3$, являются константами, тогда $\Delta > 0$.

Предположение 3. Пусть $f_1 \geq \frac{1}{2}, f_2 \geq \frac{1}{2}, f_3 \geq \frac{1}{2}$. Тогда $\Delta > 0$.

Предположение 4. Пусть одна из функций $f_i, i = 1,2,3$, постоянна (например, $f_3 = c$) и $f_1 \geq \frac{c}{2(1+c)}$ или $f_2 \geq \frac{c}{2(1+c)}$. Тогда $\Delta > 0$.

Предположение 5. Пусть $f_1 \leq \frac{1}{2}, f_2 \leq \frac{1}{2}, f_3 \leq \frac{1}{2}$. Тогда $\Delta > 0$.

Предположение 6. Пусть одна из функций $f_i, i = 1,2,3$, постоянна (например, $f_3 = c$) и пусть существует число β такое, что $0 < \beta < 1$ а также $f_1 \leq \beta$ и $f_2 \leq 1 - \beta$. Тогда $\Delta > 0$.

Предположение 7. Пусть выполняются неравенства $\mathrm{f}_2 \geq \mathrm{f}_3, 2\mathrm{f}_3 \geq \mathrm{f}_2$; $\mathrm{f}_3 \geq \mathrm{f}_1, 2\mathrm{f}_1 \geq \mathrm{f}_3$; $\mathrm{f}_3 \geq 0$. Тогда $\Delta > 0$.

Заключение

Авторы убеждены, что неравенство $\mathit{\Delta} > 0$ справедливо при произвольных $f_i, i = 1,2,3$, но пока это не доказано. В дальнейшем предполагается исследование задачи минимакса, как это было сделано в as [2–3] в случае независимых приоритетов.

Литература

[1] Pavlov, I.V. Optimization of complex systems of quasilinear type with several independent priorities / I.V. Pavlov, S.I. Uglich // Vestnik RGUPS. — 2017. — №3. — P. 140–145.

[2] Volosatova, T.A. Minimax problem for quasilinear complex systems with independent priorities // T.A. Volosatova, I.V. Pavlov, S.I. Uglich // Vestnik RGUPS. — 2019. — №2. — P. 149–154.

[3] Pavlov, I.V. On stationary points of the function of maximum arising in a quasilinear model with independent priorities / I.V. Pavlov, S.I. Uglich // Vestnik RGUPS. – 2019. – №4. – P. 143–148.

Спасибо за внимание!