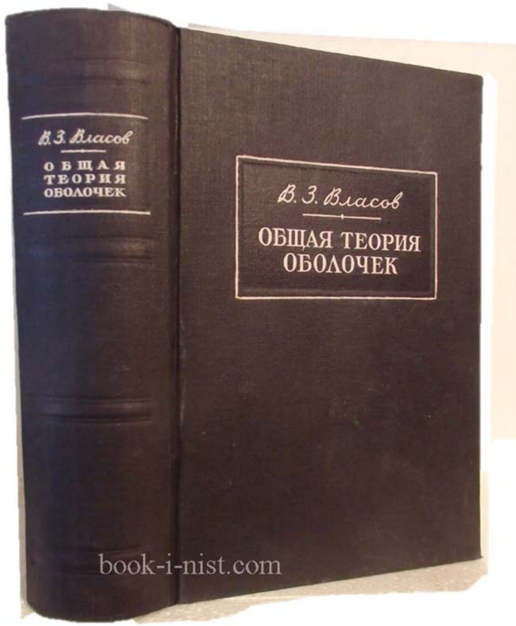
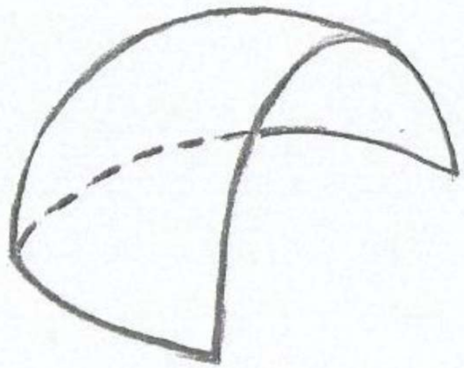
Международный симпозиум «New Trends of Stochastic Analysis 2021»
NTSA-21

Е. В. Тюриков

Об одном случае квазикорректности канонической граничной задачи мембранной теории выпуклых оболочек

Дивноморское,
1-5 июня 2021 г.





Власов В.З. Общая теория оболочек. – М.: Гостехиздат, 1949.

«Тонкостенные пространственные системы»

Сферические купола

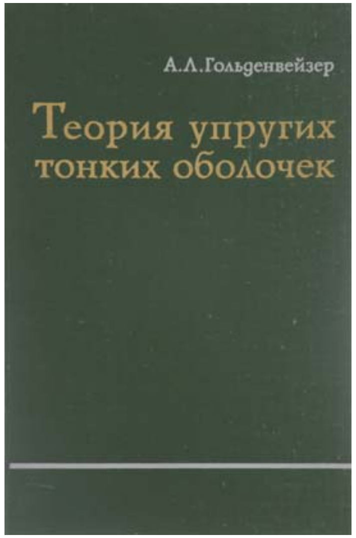


рис.1

S – срединная поверхность

Φ(z) - комплексная функция напряжений, отыскиваемая как аналитическая функция в классах Н. И. Мусхелишвили [3]

$$|\Phi(z)| < K \, | z - z_k |^{-\alpha} \qquad 0<\alpha<1$$

Z_k - точка комплексной плоскости Z (“интегрируемая бесконечность” [3] или условие концентрации напряжений [2])

Способ реализации безмоментного состояния напряженного равновесия – “метод стержневых систем “

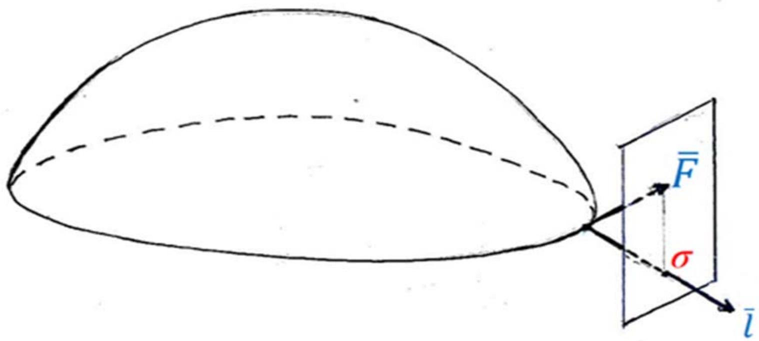
[1] Гольденвейзер А.Л./О применении решений задачи Римана-Гильберта к расчету безмоментных оболочек// Прикл. матем. и мех. – 1951. Т.XV, №2. – С . 149-166.
[2] Гольденвейзер А.Л. Теория тонких упругих оболочек. – М.: Наука, 1976.
[3] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1968. – 511с.

Задача построения мембранной теории выпуклых оболочек с гладким краем решена в [4 – 6] в предположении, что $S \in W^{3,p}$, $p > 2$. Следуя [5], эллиптическую систему уравнений безмоментного напряжённого равновесия оболочки V запишем в виде

$$\frac{\partial w(z)}{\partial \bar{z}} - B(z)\overline{w}(z) = F(z), \quad z \in D,$$

$\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ — оператор комплексного дифференцирования, где $i^2 = -1$, $w(z)$— комплексная функция напряжений, выраженная через компоненты контрвариантного тензора усилий и коэффициенты метрической формы поверхности, $B(z)$ — заданная поверхностью функция класса $L_p(\overline{D})$, $p > 2$, $F(z)$ — *комплексная функция внешней нагрузки* оболочки, $F \in L_p(\overline{D})$, $p > 2$. При этом

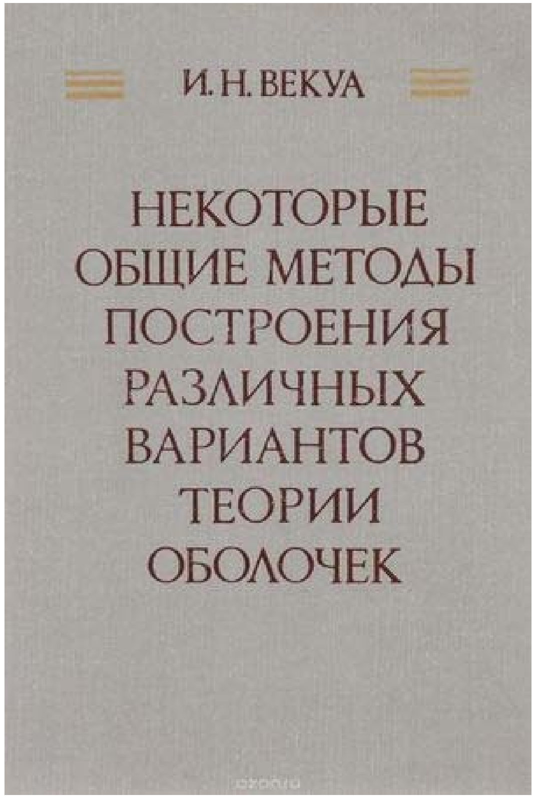
$$Re\{\lambda(\zeta)w(\zeta)\} = \gamma(\sigma, K, k_s, k_j, X), \qquad \zeta \in \Gamma \qquad (1)$$

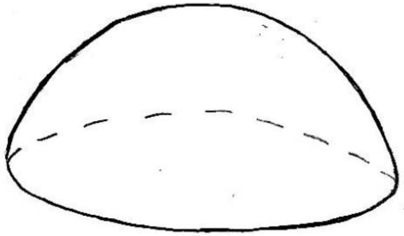


[4] Векуа И.Н. Системы дифференциальных уравнении первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением теории оболочек//Матем. сб. – 1952. – т. 31, № 2. – С.217-314.

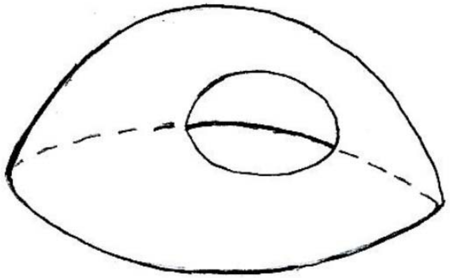
[5] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959 – 512 с.

[6] Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – М.: Наука, 1982. – 288 с.

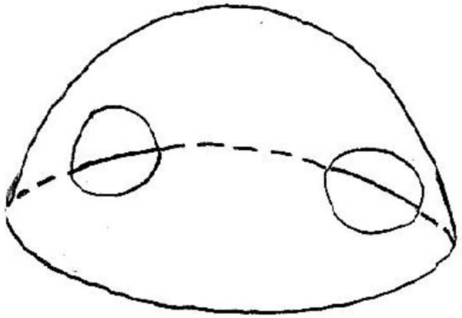




$\varkappa = ind_\Gamma \lambda = -2$; задача (1) корректна



$\varkappa = ind_\Gamma \lambda = 0$; особый случай задачи Римана-Гильберта



$\varkappa = ind_\Gamma \lambda = 2$; безусловная разрешимость

1. **Граничная задача *R*.** Пусть S — односвязная поверхность с кусочно-гладким краем $L = \bigcup_{j=1}^{n} L_j$ и угловыми точками p_i $(i = 1,\dots, n)$. Предполагается, что S есть внутренняя часть поверхности S_0 строго положительной гауссовой кривизны класса регулярности $W^{3,r}$, $r > 2$, а каждая из гладких дуг L_j принадлежит классу $C^{1,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$. Зададим на S вдоль L кусочно-непрерывное векторное поле $\boldsymbol{r} = \{\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{s}), \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{s})\}$**,** допускающее разрывы первого рода в точках p_j, с касательной и нормальной составляющими $\alpha(s)$, $\beta(s)$ $(\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\beta \geqslant 0)$, где s — натуральный параметр, функции $\alpha(s)$, $\beta(s)$ — гёльдеровы на каждой из дуг L_j.

Введём обозначения: J — отображение поверхности S_0 на комплексную плоскость $z = x + iy$, заданное выбором сопряжённо изометрической параметризации (x, y) на S_0, $D = J(S)$ — ограниченная в комплексной плоскости z односвязная область с границей $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{n} J(L_j)$ и угловыми точками $q_i = J(p_i)$.

Рассмотрим следующую задачу (задача R): найти в области D комплекснозначное решение $w(z)$ уравнения (*функцию изгибаний* поверхности S)

$$w_{\bar{z}}(z) - B(z)\overline{w}(z) = F(z), \quad z \in D, \quad (1)$$

по заданному граничному условию Римана–Гильберта

$$\mathrm{Re}\{\lambda(\zeta)w(\zeta)\} = \gamma(\zeta), \qquad (2)$$

где

$$\lambda(\zeta) = s(\zeta)[\beta(\zeta)t(\zeta) - \alpha(\zeta)s(\zeta)], \qquad (3)$$

$s(\zeta) = s_1(\zeta) + is_2(\zeta)$, $t(\zeta) = t_1(\zeta) + it_2(\zeta)$, $i^2 = -1$, s_i $(i = 1, 2)$ — координаты касательного к Γ орта в точке ζ, t_i $(i = 1, 2)$ — координаты орта направления на плоскости, являющегося J-образом тангенциального направления на поверхности в точке $J^{-1}(\zeta)$, значения функций $\alpha(\zeta)$, $\beta(\zeta)$ совпадают со значением функций α, β в соответствующей точке $c = J^{-1}(\zeta)$, функция $\gamma(\zeta)$ гёльдерова на каждой из дуг $\Gamma_j = J(L_j)$, $w_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(w_x + iw_y)$, $B(z)$, $F(z)$ — заданные в области D функции класса $L_r(D)$, $r > 2$.

При этом отыскиваются $W^{1,r}$-регулярные в области D решения $w(z)$, непрерывно продолжимые на L, за исключением точек разрыва q_i, в окрестности которых имеет место оценка $\boldsymbol{|w(z)| < const \cdot |z - q_i|^{-\alpha_j}, 0 < \alpha_j < 1}$**. Класс таких решений обозначим через** $\boldsymbol{H^*}$**.** Данное неравенство имет адекватный физический смысл: интеграл энергии растяжения оболочки конечен (Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. Теория упругости. – М., 1965. – 204с.)

Задача R есть **семейство R^{r}** задач (1)–(3), каждая из которых задаётся выбором векторного **поля $\boldsymbol{r}$**.

2. Задача $\boldsymbol{R}$ для канонических куполов. Пусть p — какая-либо из угловых точек p_i границы L, $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$ — главные направления в этой точке, k_1, k_2 — соответствующие им главные кривизны $(k_1 > k_2)$. Поверхность S есть *канонический* купол K, если направление одной из дуг, сходящихся в каждой угловой точке, совпадает с главным направлением $\boldsymbol{k}_2$, а для величин ν_i внутренних углов в точках p_i выполнены условия $0 < \nu_i \leqslant \frac{\pi}{2}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Задачу R для канонического купола K назовём канонической, если направление поля $\boldsymbol{r}$ в каждой точке p есть направление обобщённой касательной [8] в этой точке, то есть $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2$, где $\boldsymbol{r}_i$ $(i = 1, 2)$ — односторонние пределы вектор-функции $\boldsymbol{r}$ в точке p.

Введём также обозначения: δ_i^2-отношение соответствующих главных кривизн в точке p_i $(0 < \delta_i < 1)$, $p(\nu_i)$ — угловая точка p_i с внутренним углом ν_i, $T(\nu_i)$ — множество (*сектор*) направлений *обобщённой* касательной в этой точке, T — множество непрерывных на L векторных полей $\boldsymbol{r}$, задающих в каждой угловой точке $p(\nu_j)$ направление обобщённой касательной. Как установлено в [8], каноническая задача R квазикорректна для любого поля $\boldsymbol{r} \in T$, если $n \geqslant 2$. Полученная ниже формула для индекса κ граничного условия (2) позволяет дать полную картину разрешимости задачи R при любом поле $\boldsymbol{r} \in T$.

Следуя И. Н. Векуа [5] задачу $R^{\mathbf{r}}$ назовём *s-квазикорректной* в классе H^*, если она безусловно разрешима в этом классе, а её решение зависит от s вещественных произвольных постоянных (*s-порядок квазикорректности*).

Определение 1. Каноническая задача R называется ***квазиустойчивой*** относительно поля направлений обобщённой касательной, если задача $R^{\mathbf{r}}$ *s-квазикорректна* для любого поля $\boldsymbol{r} \in T$.

Замечание 1. В силу теоремы о разрешимости задачи Римана–Гильберта для обобщённых аналитических функций [5] задача $\boldsymbol{R}$ квазиустойчива тогда и только тогда, когда индекс κ есть инвариант поля $\boldsymbol{r} \in T$.

Замечание 2. Техника [6, 7] вычисления индекса граничного условия вида (2) использует понятие [9] *особенного узла* p_i задачи (1), (2) или *особенной точки* $q_i = J(p_i)$ разрыва граничного условия (2), в которой $\omega_i = 2\pi k$, где ω_i — скачок аргумента функции

$$\Lambda(\zeta) = \overline{\lambda(\zeta)}[\lambda(\zeta)]^{-1} \qquad (4)$$

в точке разрыва q_i, взятой с обратным знаком, k — целое число. Принимая во внимание выражение (3) для $\lambda(\zeta)$ и условие $0 < \nu \leqslant \frac{\pi}{2}$, для *особенного узла* q канонической задачи R имеем

$$\omega = 2\pi. \qquad (5)$$

Пусть $p(\nu)$ — угловая точка границы L, $\boldsymbol{r} \in T(\nu)$. Направление поля $\boldsymbol{r}$ в точке $p(\nu)$ назовём *особенным* направлением обобщённой касательной, если точка $q = J(p)$ разрыва граничного условия (2) есть *особенный узел* [9] задачи (2), (3).

Определение 2. Угловую точку $p(\nu)$ назовём *точкой неустойчивости* задачи R, если сектор $T(\nu)$ содержит *особенное* направление.

Формулировка результатов. Пусть p_i $(i = 1,\dots, n)$ — угловые точки границы L канонического купола K, δ_i $(0 < \delta_i < 1)$ — отношения главных кривизн поверхности в этих точках.

Теорема 1. Угловая точка $p(\nu_i)$ есть точка неустойчивости задачи R тогда и только тогда, когда

$$\arccos\frac{1}{1+\delta_i} \leqslant \nu_i \leqslant arcctg\sqrt{t_i},$$

где t_i — единственный положительный корень уравнения

$$2\sqrt{\frac{1+\delta^2 t}{\delta^2+t}} + \frac{1+\delta^2 t}{\delta^2+t} - 4\sqrt{\frac{E}{\mathcal{K}(1+t)^2+4Et}} = \frac{1}{t}, \tag{6}$$

в котором $\delta = \delta_i$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_i$, $E = E_i$ — Гауссова кривизна и Эйлерова разность поверхности S в точке p_i $(i = 1,\dots, n)$.

Теорема 2. Каноническая задача R квазиустойчива в классе H^* относительно векторного поля $\boldsymbol{r} \in T$ тогда и только тогда, когда граница L не содержит точек неустойчивости.

При этом число $s = 3m + 2k - 3$ — порядок квазикорректности задачи R, где m и k – число устойчивых точек 1-го и 2-го типа соответственно.

Лемма. Если $p(\nu)$ — угловая точка границы L, $\gamma_1 < \nu < \gamma_2$, то существует единственное *особенное* направление $\boldsymbol{\gamma} \in T(\nu)$ обобщённой касательной.

Направление $\boldsymbol{\gamma}_i$ разбивает множество неособенных направлений сектора $T(\nu_i)$ на два непересекающихся класса $T^{(1)}(\nu_i)$ и $T^{(2)}(\nu_i)$. Тогда набору угловых точек можно поставить в соответствие классы полей направлений обобщенной касательной вида $T^{(1)}_{i_1,\dots,i_s} \circ T^{(2)}_{j_1,\dots,j_k}$ $(i_m \neq j_r,\ m = 1,\dots,\ s,\ r = 1,\dots,\ k)$, $s + k = n$.

Теорема 3. Каноническая задача R квазиустойчива в классе H^* относительно векторного поля $\boldsymbol{r} \in T^{(1)}_{i_1,\dots,i_s} \circ T^{(2)}_{j_1,\dots,j_k}$ $(i_m \neq j_r, m = 1,\dots, s, r = 1,\dots, k)$, $s + k = n$.

Точки неустойчивости

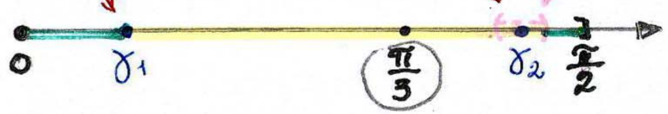
I. $\delta \to 0$

$\gamma_1 \leq \nu \leq \gamma_2$

$\gamma_1 = \gamma_1(\delta)$

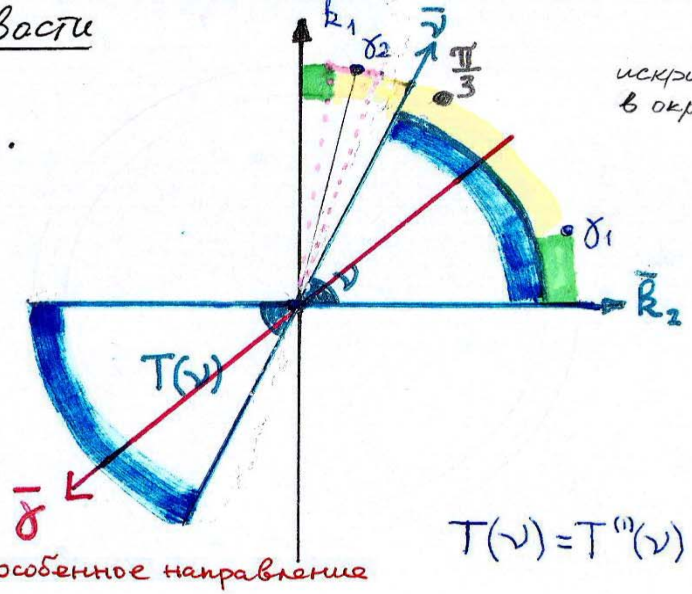
$\gamma_2 = \gamma_2(\delta, k_2)$

$\delta = \sqrt{\dfrac{k_2}{k_1}}, \ k_2 < k_1.$



$\lim\limits_{\delta \to 0} \gamma_1 = 0; \quad \lim\limits_{\delta \to 0} \gamma_2 = \frac{\pi}{2} \quad \forall k_2 > 0$

$\delta^2 = \dfrac{k_2}{k_1} < 1.$



искривление в окрестности

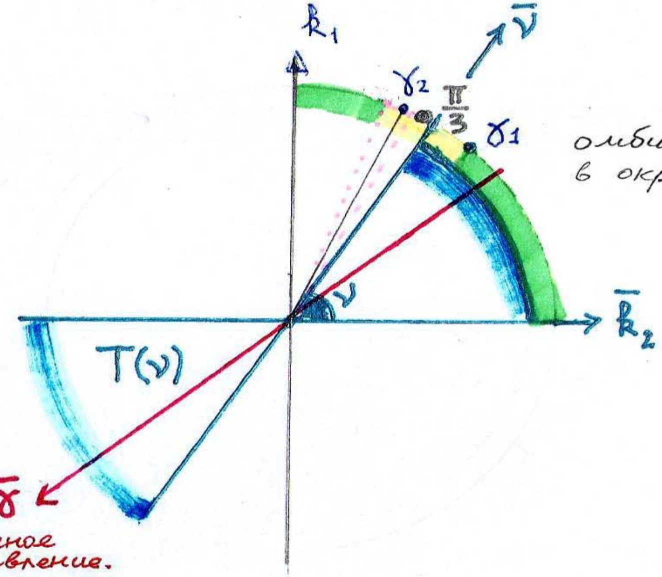
$T(\nu) = T^{(1)}(\nu) \cup T^{(2)}(\nu)$

$\bar{\gamma}$ – особенное направление

$$\boxed{\gamma_1 = \arccos \frac{1}{1+\delta}}$$

II. $\delta \to 1 \ (\delta < 1)$

$\lim\limits_{\delta \to 1-0} \gamma_1 = \frac{\pi}{3}; \quad \lim\limits_{\delta \to 1-0} \gamma_2 = \frac{\pi}{3} \ (\forall k_2 > 0)$

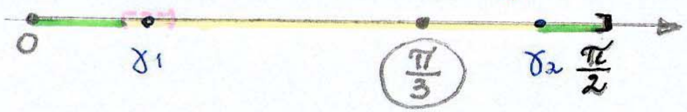


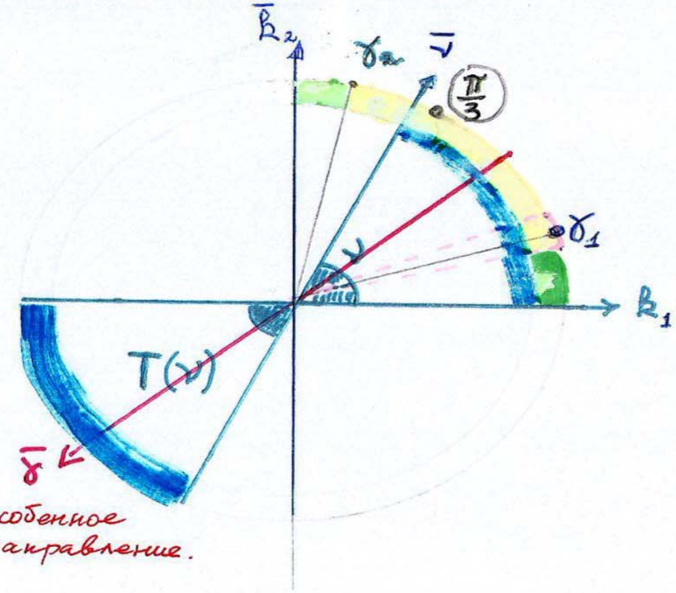
омбиличность в окрестности

γ – особенное направление.

III $\quad \delta \to \infty \qquad \underline{\gamma_1 \leq \nu \leq \gamma_2}$

$\gamma_1 = \gamma_1(\delta, k_1) \qquad \gamma_2 = \gamma_2(\delta) \qquad \delta = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}, \; k_1 > k_2.$





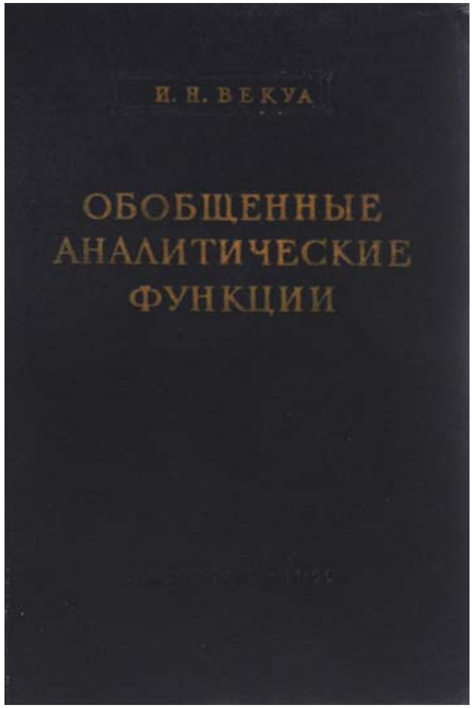
$$\lim_{\delta \to \infty} \gamma_1 = 0 \; (\forall k_1 > 0); \quad \lim_{\delta \to \infty} \gamma_2 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\delta^2 = \frac{k_1}{k_2} > 1$$

IV $\quad \delta \to 1 \quad (\delta > 1)$

$$\lim_{\delta \to 1} \gamma_1 = \frac{\pi}{3} \; (\forall k_1 > 0), \quad \lim_{\delta \to 1} \gamma_2 = \frac{\pi}{3}.$$

$$\boxed{\gamma_2 = \arccos \frac{1}{1+\delta}, \quad \delta^2 = \frac{k_1}{k_2} > 1}$$



ПОЛОГИЕ ОБОЛОЧКИ:

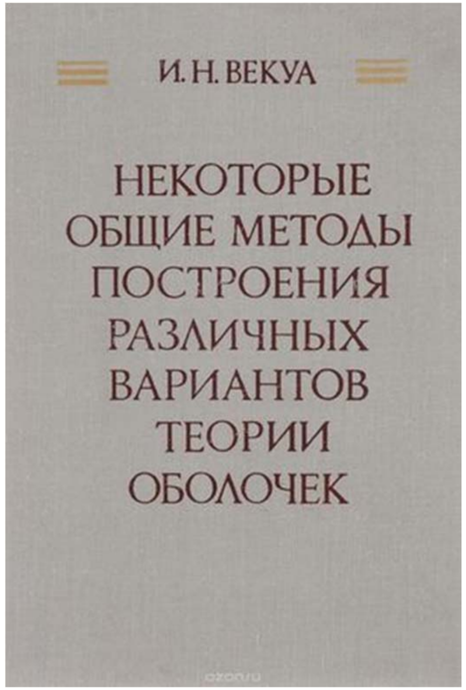
$\boldsymbol{k_1} \cong \boldsymbol{k_2}$ в каждой точке серединной поверхности (И. Н. Векуа)

Если $\gamma_k \cong \frac{\pi}{3}$ в угловых точках p_k $(k = 1, \dots, \mathrm{n})$, $\boldsymbol{r}$ – поле направлений обобщенной касательной, то p_k – точки <u>неустойчивости</u>.

Пусть $\delta^{(k)}$ – непрерывные случайные величины (независимые) с центром распределения 1 (или $(\delta^{(k)}, \dots, \delta^{(k)}$-мерная случайная величина), $\mathrm{D}\delta^{(k)} = ?$

Тогда задача $R^{(r)}$ *s – квазикорректна* в классе H^*, причем *s* - **дискретная случайная величина** (д.с.в.) со значениями *2n - 3, 2n - 2, … , 3n - 2, 3n – 4, 3n – 3 (всего n + 3 значений).*

Если $\gamma_k \cong \frac{\pi}{3}$ в лишь некоторых точках из числа p_k $(k = 1, \dots, \mathrm{n})$, то число возможных значений д.с.в. *s* меньше, чем *n + 3*



Спасибо за внимание!

Тюриков Евгений Владимирович

Донской государственный технический университет
etyurikov@hotmail.com