

О некоторых результатах в современной теории операторов преобразования

Ситник С.М.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ "БелГУ")

Международный симпозиум
«New Trends of Stochastic Analysis-2021» (NTSA-2021)
пос. Дивноморское, 01–05 июня 2021 г.

НИУ "БелГУ" , Белгород, Россия



ПАМЯТИ МОИХ УЧИТЕЛЕЙ:

Киприянова Ивана Александровича
Катрахова Валерия Вячеславовича



ИВАН АЛЕКСАНДРОВИЧ
КИПРИЯНОВ
(1923—2001)

ШКОЛА И.А.КИПРИЯНОВА

Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. — М. : Наука-Физматлит, 1997.

Наиболее полно весь круг вопросов для уравнений с операторами Бесселя был изучен воронежским математиком Иваном Александровичем Киприяновым и его учениками Л.А. Ивановым, А.В. Рыжковым, В.В. Катраховым, В.П. Архиповым, А.Н. Байдаковым, Б.М. Богачёвым, А.Л. Бродским, Г.А. Виноградовой, В.А. Зайцевым, Ю.В. Засориным, Г.М. Каганом, А.А. Катраховой, Н.И. Киприяновой, В.И. Кононенко, М.И. Ключанцевым, А.А. Куликовым, А.А. Лариным, М.А. Лейзиным, Л.Н. Ляховым, А.Б. Муравником, И.П. Половинкиным, А.Ю. Сазоновым, С.М. Ситником, В.П. Шацким, Э.Л. Шишкиной, В.Я. Ярославцевой.

Пространства Киприянова. В.В.Катрахов, В.З. Мешков.

Классификация И.А.Киприянова:

В–эллиптические, В–гиперболические, В–параболические уравнения

$$\sum_{k=1}^n B_{\nu, x_k} u(x_1, \dots, x_n) = f, B_{\nu} u(x) = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{2\nu + 1}{x} \frac{du}{dx}. \quad (1)$$

Изучение этого класса уравнений было начато в работах Эйлера, Пуассона, Дарбу, продолжено в теории обобщённого осесимметрического потенциала А. Вайнштейна и в трудах математиков И.Е. Егорова, Я.И. Житомирского, В.В. Кравченко, Л.Д. Кудрявцева, П.И. Лизоркина, М.И. Матийчука, Л.Г. Михайлова, М.Н. Олевского, М.С. Салахиддинова, М.М. Смирнова, С.А. Терсенова, А.К. Уринова, Хе Кан Чера, А.И. Янушаускаса и других.

NORTH-HOLLAND
MATHEMATICS STUDIES

69

Notas de Matemática
editor: Leopoldo Nachbin

Transmutation, Scattering Theory and Special Functions

ROBERT CARROLL

$$(10.54) \quad = (1/4\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \{\Phi_{\lambda}^Q(x)\Phi_{-\lambda}^Q(\xi) + \Phi_{\lambda}^Q(\xi)\Phi_{-\lambda}^Q(x)\} d\lambda + \\ (1/4\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{C_Q(\lambda)}{C_Q(-\lambda)} \Phi_{\lambda}^Q(x)\Phi_{-\lambda}^Q(\xi) + \frac{C_Q(-\lambda)}{C_Q(\lambda)} \Phi_{-\lambda}^Q(x)\Phi_{\lambda}^Q(\xi) \right\} d\lambda$$

If one could show that the integrals

$$(10.55) \quad \int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda)\Phi_{\lambda}^Q(x)\Phi_{\lambda}^Q(\xi) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} S(-\lambda)\Phi_{-\lambda}^Q(x)\Phi_{-\lambda}^Q(\xi) d\lambda = 0$$

then since $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\lambda}^Q(x)\Phi_{\lambda}^Q(\xi) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{-\lambda}^Q(x)\Phi_{-\lambda}^Q(\xi) d\lambda$ we will obtain (10.52). Now in general (cf. Chadan-Sabatier [1]) one does not expect any analytic properties from $S(\lambda)$ in a halfplane $\text{Im} \lambda > 0$ for example (recall here $F(\lambda) = 2i\lambda N(\lambda)$ and $F(-\lambda) = 1/2M_1(\lambda)$) but, with exponential decrease of $q(x)$, $F(\lambda)$ and $F(-\lambda)$ have a common domain of holomorphy. In particular for $\text{Im} \lambda > -H$, $F(\lambda)$ and $1/F(-\lambda)$ are analytic (the simple pole at $\lambda = 0$ in $M(\lambda)$ is removed in $F(\lambda)$) and neither function vanishes for $\text{Im} \lambda > -\delta$. Hence $S(\lambda) = F(-\lambda)/F(\lambda)$ ($= \rho(\lambda)$) is analytic for $\text{Im} \lambda > -\delta$. As $|\lambda| \rightarrow \infty$, $|F(\lambda) - 1| = O(|\lambda|^{-1})$ and $|S(\lambda)| = O(1)$. Since $\Phi_{\lambda}^Q(x) \sim e^{i\lambda x}$ we deduce formally by taking contour integrals over large semicircles in the upper halfplane and passing to limits that (10.55) holds. Hence as in Hutson [4]

Theorem 10.13. For rapidly decreasing potentials q as indicated one has an inversion for (10.25) $\sim$ (10.48) of the form (10.50).

11. Singular pseudodifferential operators. In connection with work on embedding theorems and so-called Q -elliptic operators Katrakhov and Kipriyanov in particular introduced the study of certain singular pseudodifferential operators (psdo) connected with $\hat{Q}_m = Q_m^0 - Q_m - D^2 + ((2m+1)/x)D$ (cf. here Katrakhov [1-4], Kipriyanov [1;2], Kipriyanov-Katrakhov [3], Kipriyanov-Kas'chenko [5], Kipriyanov-Lyakov [4], Kipriyanov-Ivanov [6], Kipriyanov-Kononenko [7], Kipriyanov-Axiev [8], Kipriyanov-Klyuchantsev [9], Leizin [1],

Lyakov [1], Sazonov [10]). The constructions involved transmutation operators (for Q_m) of the form studied here and in using our general framework it is possible to generalize and reorganize the formulation of Katrakhov [2;4] a Kipriyanov-Katrakhov [3] in a more "canonical" manner. This leads to a version which produces automatically analogous singular psdo for any singular Q of the form $Q = \langle \Delta_Q u \rangle' / \Delta_Q$ (with $R^Q \sim du_Q$) modeled on the radial Laplace Beltrami operator in a rank one noncompact Riemannian symmetric space (the constructions of Katrakhov and Kipriyanov would not do this). We are mainly concerned with various aspects of transmutation and do not go into much detail about psdo here; one can find a thorough exposition of the standard machinery in Trèves [1]. It will be sufficient generally to think of C^∞ "symbols" $a(y, \lambda)$ of compact support in y , $D_y^k a(y, \lambda) = 0$ at $y = 0$ for $k \geq 1$, $a(y, \lambda) = 0$ for say $|\lambda| \leq h$, $a(y, \lambda)$ even in y and λ , $|D_y^\alpha D_\lambda^\beta a(y, \lambda)| \leq c_{\alpha\beta} (1+|\lambda|)^{-m-\alpha}$, etc. (homogeneity in λ of some order for example). Generally we do not use such properties beyond a few arguments with even functions (reflecting our preoccupation with halfline problems). It is quite enough for our purposes to exhibit the formal expressions which will define various singular psdo and to make a few general remarks showing that this is meaningful. We also show how certain transmutations used by Katrakhov [4] can be written in terms of Erdélyi-Kober operators; this involves the study of an interpolating chain Π_μ of transmutations connecting B_Q and $\tilde{B}_Q = (B_Q^{-1})^\theta$.

We will not try to sketch the development in Katrakhov and Kipriyanov since it is quite different at various places but we give a few points of contrast. One begins with a transmutation $B_Q: D^2 + Q = Q_m$ where $Q_m = D^2 + ((2m+1)/x)$ and more generally we think of $B_Q: D^2 + \hat{Q} \rightarrow Q_m$ where $Q_m = \langle \Delta_Q u \rangle' / \Delta_Q$ modeled on the radial Laplace-Beltrami operator as above and $\hat{Q} = Q + \rho_Q^2$, $\rho_Q = \frac{1}{2} \ln \Delta_Q' / \Delta_Q$ as $x \rightarrow \infty$ (note for $Q = Q_m$, $\rho_Q = 0$ so $\hat{Q}_m = Q_m$). We recall for D^2 the spherical functions are $\varphi_\lambda^D(x) = \cos \lambda x$ and for $Q = Q_m$ one has $\varphi_\lambda^Q(x)$



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННЫЕ
ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИКИ
Фундаментальные
направления

том 26



Москва 1998

УДК 517.518.1+517.518.2

1. ПРОСТРАНСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ

Л. Д. Кудрявцев, С. М. Никольский

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	7
Глава 1. Функциональные пространства	7
§ 1. Понятие пространства	7
§ 2. Линейные пространства	10
§ 3. Топологические пространства	12
§ 4. Метрические пространства	13
§ 5. Нормированные и полунормированные пространства. Банаховы пространства	18
§ 6. Пространства со скалярным произведением. Гильбертовы пространства	23
§ 7. Полные системы функций. Базисы	26
§ 8. Сопряженные пространства	31
§ 9. Линейные операторы	36
§ 10. Лебеговы пространства	37
§ 11. Пространства Морри	39
Глава 2. Пространства Соболева	40
§ 1. Обобщенные производные	40
§ 2. Граничные значения (следы) функций	46
§ 3. Пространства Соболева	48
§ 4. Пространства Соболева бесконечного порядка	53
§ 5. Производные и интегралы дробного порядка	56
Глава 3. Теоремы вложения Никольского	58
§ 1. Неравенства для целых функций	58
§ 2. Теоремы вложения для изотропных H -классов	59
§ 3. Теоремы вложения для анизотропных H -классов	61
Глава 4. Пространства Никольского—Бесова	64
§ 1. Пространства Соболева—Стеблецкого	64
§ 2. Пространства $B_{p,q}^r$	65
§ 3. Теоремы вложения для пространств Никольского—Бесова. Решение проблемы о следах функций из пространств Соболева	68
Глава 5. Пространства Соболева—Диницкая	71
§ 1. Пространства L_p^r	71
§ 2. Изучение функциональных пространств методами гармонического анализа	75
§ 3. Пространства Лизоркина—Трибеля	77
§ 4. Обобщения пространств Никольского—Бесова и Лизоркина—Трибеля	78
Глава 6. Пространства функций, заданных на областях	83

§ 5. Весовые пространства Киприянова

В 1967 году И. А. Киприянов рассмотрел класс весовых пространств, построенный на основе преобразований Фурье—Бесселя.

Пусть $\mathbb{R}^{n+1}$ — евклидово пространство точек $x = (x^{(n)}, y)$, $x^{(n)} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, а $\mathbb{R}^{n+1} = \{x; y > 0\}$. Для каждого $\nu \geq -\frac{1}{2}$ весовое пространство $L_{2,\nu}(\mathbb{R}^{n+1})$ определяется как множество измеримых по Лебегу функций $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_{2,\nu}(\mathbb{R}^{n+1})} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |f(x)|^2 y^{2\nu+1} dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Если $J_\nu(t)$ — функция Бесселя первого рода и

$$j_\nu(t) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{t^\nu} J_\nu(t), \quad (7.35)$$

то преобразование Фурье—Бесселя F_ν определяется за формуле

$$(F_\nu f)(\xi) = c_{n,\nu} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-i(\xi^{(n)}, x^{(n)})} J_\nu(yt) f(x) y^{2\nu+1} dx, \quad (7.36)$$

где

$$c_{n,\nu} = \frac{1}{2^{\nu+\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\nu+1)}, \quad \xi = (\xi^{(n)}, \eta).$$

Из равенства типа равенства Парсеваля

$$\|f\|_{L_{2,\nu}(\mathbb{R}^{n+1})} = \|F_\nu f\|_{L_{2,\nu}(\mathbb{R}^{n+1})} \quad (7.37)$$

следует унитарность оператора F_ν в пространстве $L_{2,\nu}(\mathbb{R}^{n+1})$. Подобно преобразованию Фурье, преобразование Фурье—Бесселя сводит операцию дифференцирования, правда специального вида, к умножению на соответствующие аргументы. Именно, если

$$B_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2\nu+1}{y} \frac{\partial}{\partial y},$$

то для четной по переменной y функция f имеет место формула

$$\left(F_\nu \frac{\partial}{\partial x_j} B_y f \right)(\xi) = -i \xi_j / \eta^2 (F_\nu f)(\xi). \quad (7.38)$$

119

Через $W_{2,1}^{(s)}(\mathbb{R}^{n+1})$, $s > 0$, обозначается пространство измеримых на $\mathbb{R}^{n+1}$ функций f , для которых конечна норма

$$\|f\|_{W_{2,1}^{(s)}(\mathbb{R}^{n+1})} = \sup_{t>0} \left\{ (1+t^{-1})^s F_\nu f \right\}_{L_{2,\nu}(\mathbb{R}^{n+1})}. \quad (7.39)$$

В работе И. А. Киприянова [22] доказана эквивалентность норм (7.39) соответствующим нормам, записываемым в образах преобразования Фурье—Бесселя, например, при четных $s \geq 0$ одна из таких норм имеет вид

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left[|f(x)|^2 + \left| B_y^\frac{s}{2} f(x) \right|^2 + \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \right|^2 \right] y^{2\nu+1} dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Пространства $W_{2,1}^{(s)}(\mathbb{R}^{n+1})$ позволяют построить для полупространства достаточно полную теорию разрешимости эллиптического уравнения типа Эйлера—Пуассона—Дарбу

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + B_y u - \lambda^2 u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (7.40)$$

с краевым условием

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0. \quad (7.41)$$

Эта теория послужила отправной точкой для получения теорем вложения для следов функций из пространств $W_{2,1}^{(s)}$ и построения спектральной теории для сингулярных эллиптических уравнений.

Пространства $W_{2,1}^{(s)}$ и их обобщения (анизотропные пространства подобного типа, пространства с комплексным параметром ν) нашли также свое применение в теории псевдодифференциальных операторов, изучении полюсов ядер дробных степеней сингулярных эллиптических операторов, построении теории сингулярных параболических систем уравнений и ряда других вопросов.

Глава 8

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВ НИКОЛЬСКОГО—БЕСОВА И ЛИЗОРКИНА—ТРИЕЛЯ

§ 1. Интерполяция пространств

Для изучения вложений функциональных пространств широко применяется метод интерполяции линейных операторов, существование которого состоит в том, что из ограниченности линейного

120

Х. ТРИБЕЛЬ ТЕОРИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

3.10.4. Пространства Киприянова

Один специальный класс весовых пространств типа Соболева — Слободецкого был изучен Киприяновым [1, 4]. Основную идею построения таких пространств можно описать следующим образом. Известно, что одним из самых мощных методов исследования пространств $H_p^s(R_n)$ служит преобразование Фурье. Естественно задаться вопросом, не существует ли каких-либо других интегральных преобразований, пригодных для исследования других классов функциональных пространств. Пусть $J_\nu(t)$, $\nu \geq -1/2$, — бesselовы функции. Тогда равенства

$$f_\nu(s) = \int_0^\infty \sqrt{sx} J_\nu(sx) f(x) dx,$$

$$f(x) = \int_0^\infty \sqrt{sx} J_\nu(sx) f_\nu(s) ds$$

задают соответственно прямое и обратное преобразования Бесселя. Можно определить отвечающие этому преобразованию пространства как пополнение множества $C_0^\infty(R_n^+)$ по норме

$$\left(\int_{R_n^+} |f(x)|^2 x_n^{2\gamma} dx + \int_{R_n^+} \left| x_n^{\frac{\partial f}{\partial x_n}}(x) \right|^2 x_n^{2\gamma} dx \right)^{1/2},$$

$s = 1, 2, \dots$, $\gamma \geq 0$. Более общие пространства подобного типа получаются, если скомбинировать несколько одномерных преобразований Бесселя и k -мерное преобразование Фурье. Кроме того, можно определить такие пространства и для нецелых s . Изложение теории такого рода пространств можно найти в указанных статьях Киприянова. Там имеются теоремы вложения, теоремы продолжения и т. д. Отметим еще статью Богачёва [1].

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Определение. Пусть дана пара операторов (A, B) . Оператор $T \neq 0$ называется *оператором преобразования* (ОП, transmutation), если выполняется соотношение

$$T A = B T. \quad (2)$$

Сплетающий оператор, transmutation, intertwining operator, подобный оператор.

$$\begin{aligned} Au = f, \quad & : T, Bv = g \\ v = Tu, g = Tf. \\ u = T^{-1}v. \end{aligned}$$

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

- Подобные матрицы (унитарное подобие)
- Дифференциальные операторы
- Преобразования Дарбу
- Интегральные операторы
- Интегродифференциальные операторы
- Операторы Дункла
- Дробные интегралы
- Псевдодифференциальные операторы
- Обобщённые аналитические функции

ДВА МОДЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРА

Оператор Штурма–Лиувилля:

$$A = D^2 + q(x)$$

Оператор Бесселя:

$$A = D^2 + \frac{c}{x}D$$

$$B = D^2$$

Ограничения:

дифференциальные операторы высокого порядка,
уравнение Шрёдингера.

КЛАССИЧЕСКИЙ ПЕРИОД

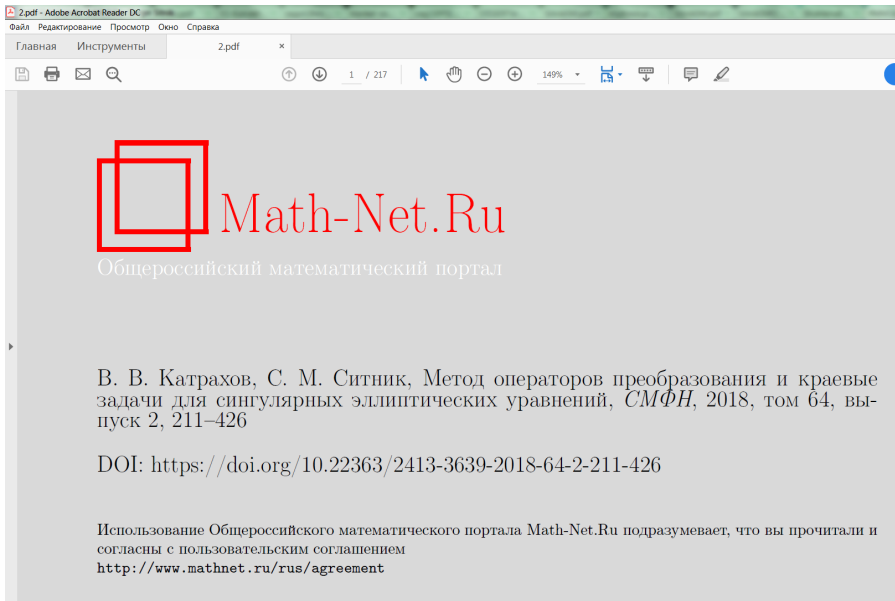
- Уравнение Штурма–Лиувилля: В.А.Марченко, Б.Я.Левин, А.Я.Повзнер.
- Обратные задачи, теория рассеяния: Б.М.Левитан, В.А.Марченко, И.М.Гельфанд.
- Формулы следов, асимптотика спектральной функции: Б.М.Левитан, В.А.Марченко, И.М.Гельфанд.
- Теория обобщённых аналитических функций: Л.Берс, С.Бергман, И.Н. Векуа, Б.Боярский, Г.Н.Положий.
- Обобщённый гармонический анализ: Ж.Дельсарт, Я.И.Житомирский, Б.М.Левитан.
- Уравнения с операторами Бесселя: Ж.Дельсарт, Лионс, В.В.Сташевская, А.С.Сохин, А.Я.Волк.
- Связь операторов преобразования с теоремами типа Пэли–Винера: В.В.Сташевская, А.И.Ахиезер, Х.Шабли, Х.Тримеш.
- Метод Лакса.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Carroll R. W. Singular and Degenerate Cauchy problems / R. W. Carroll, R. E. Showalter. — N.Y. : Academic Press, 1976.
- Carroll R. Transmutation and Operator Differential Equations / R. Carroll. — North Holland, 1979.
- Carroll R. Transmutation, Scattering Theory and Special Functions / R. Carroll. — North Holland, 1982.
- Carroll R. Transmutation Theory and Applications / R. Carroll. — North Holland, 1986.
- Фаге Д. К., Нагнибида Н. И. Проблема эквивалентности обыкновенных дифференциальных операторов / Д. К. Фаге, Н. И. Нагнибида. — Новосибирск : Наука, 1977

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля / В. А. Марченко. — Киев : Наукова Думка, 1972.
- Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. — Киев : Наукова Думка, 1977.
- Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля / Б. М. Левитан. — М. : Наука, 1984.
- Левитан Б. М. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака / Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. — М. : Наука, 1988.





Валерий Вячеславович Катрахов
(фото из личного дела 1972 г.)



Валерий Вячеславович Катрахов
(фото из личного дела 2006 г.)

Теория операторов преобразования является хорошо разработанным самостоятельным разделом математики. Значительный вклад в эту теорию и её приложения к дифференциальным уравнениям с частными производными внесли работы воронежского математика Валерия Вячеславовича Катрахова (1949–2010), ученика Ивана Александровича Киприянова.

Монография В.В. Катрахова и С.М. Ситника составлена из результатов, вошедших в докторские диссертации В. В. Катрахова (1989 г.) и С. М. Ситника (2016 г.). Результаты второго автора (ученика) развивают результаты первого автора (учителя). Надеюсь, что эта книга будет способствовать более широкой известности результатов В. В. Катрахова, которые представляют существенный интерес для теории вырождающихся и сингулярных дифференциальных уравнений, а также их разработке в русле идей и методов теории операторов преобразования. Кроме того, в книге отражён вклад Ивана Александровича Киприянова и созданной им Воронежской математической школы по сингулярным и вырождающимся дифференциальным уравнениям в развитие теории дифференциальных уравнений и теории функций.

К числу важных результатов В. В. Катрахова следует отнести исследование весовых и спектральных задач для дифференциальных уравнений и систем с операторами Бесселя с использованием техники операторов преобразования. Им также совместно с И. А. Киприяновым были введены и изучены уравнения с псевдодифференциальными операторами, которые определялись через преобразование Ханкеля при помощи операторов преобразования Сонина и Пуассона.

Особо следует выделить введенный В. В. Катраховым новый класс краевых задач для уравнения Пуассона, решения которого могут иметь существенные особенности. На основе введенного им нового класса операторов преобразования, получаемых из известных операторов Сонина и Пуассона композициями с дробными интегралами Римана—Лиувилля, В. В. Катраховым были введены специальные функциональные пространства, содержащие функции с существенными особенностями, доказаны для них теоремы вложения, прямые и обратные теоремы о следах. Для функций без особенностей указанные пространства сводятся к пространствам С. Л. Соболева, таким образом являясь их прямыми обобщениями. Для корректности задач с существенными особенностями В. В. Катраховым было предложено новое естественное краевое условие во внутренней точке области, которое заключается в задании предела свёртки решения с некоторым сглаживающим ядром типа ядра Пуассона. Мы предлагаем называть это новое краевое условие « K -следом» в честь В. В. Катрахова, который ввёл это условие и подробно изучил краевые задачи с ним.

В терминах « K -следа» получается полная характеристика решений уравнения Лапласа с внутренней особой точкой, в том числе для решений с существенными особенностями в этой точке. Для данной задачи в указанных функциональных пространствах

В. В. Катраховым была доказана корректность постановки, включая существование и единственность решения, априорные оценки. Этот результат обобщает теоремы о разрешимости эллиптических уравнений в классах С. Л. Соболева для гладких решений без особенностей. Кроме того, в последующих работах В. В. Катрахова с соавторами были рассмотрены обобщения новых краевых задач для уравнений с операторами Бесселя и сингулярным потенциалом, для областей в пространствах Лобачевского и случая угловых точек на границе области.

КОМПОЗИЦИОННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Перечисленные ранее классы ОП строились каждый своими методами. Поэтому возникает необходимость в разработке общей схемы построения ОП. Такая схема—метод факторизации или композиционный метод—был разработан С.М.Ситником. Метод основан на представлении ОП в виде композиции интегральных преобразований. Композиционный метод даёт алгоритмы не только для построения новых ОП, но содержит как частные случаи ОП СПД, Векуа–Эрдейи–Лаундеса, Бушмана–Эрдейи различных типов, унитарные ОП Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова, обобщённые операторы Эрдейи–Кобера, а также введённые Р. Кэрролом классы эллиптических, гиперболических и параболических ОП. Вводятся и используются их обобщения: классы B — эллиптических, B — гиперболических и B — параболических ОП.

Общая схема композиционного метода следующая. На вход подаётся пара операторов произвольного вида A, B , а также связанные с ними обобщённые преобразования Фурье F_A, F_B , которые обратимы и действуют по формулам

$$F_A A = g(t) F_A, F_B^{-1} g(t) = B F_B^{-1}, \quad (3)$$

где t —двойственная переменная. В дальнейшем сделаем самый очевидный выбор $g(t) = -t^2$. На выходе получаем пару ОП, сплетающих A, B . Действительно, определим пару формально взаимно обратных операторов по формулам

$$S = F_B^{-1} \frac{1}{w(t)} F_A, P = F_A^{-1} w(t) F_B \quad (4)$$

с произвольной весовой функцией $w(t)$. Тогда они являются ОП, которые удовлетворяют сплетающим соотношениям $SA = BS, PB = AP$.

Основные преимущества композиционного метода (КМ)
построения операторов преобразования
Integral Transforms Composition Method (ITCM).

- Простота построения различных классов ОП из простейших "кирпичиков" — классических интегральных преобразований
- Универсальный метод построения известных классов ОП
- Единым методом получаются прямой и обратный ОП в композиционной форме
- Метод даёт оценки норм прямого и обратного ОП из известных оценок норм классических операторов преобразования в различных пространствах
- Метод напрямую приводит к формулам связи между решениями возмущённых и невозмущённых ДУ

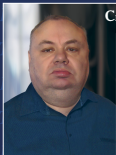
Применение композиционного метода требует выполнения следующих шагов.

- Шаг 1. Для данной пары преобразуемых операторов A, B и связанных с ними обобщённых преобразований Фурье F_A, F_B определить и вычислить пару из прямого и обратного операторов преобразования P, S по основным формулам метода (3)–(4)
- Шаг 2. Определить точные условия и найти классы функций для которых формальные операторы преобразования, полученные на шаге 1, удовлетворяют сплетающим соотношениям
- Шаг 3. Применить построенные на шагах 1 и 2 корректно определённые операторы преобразования к выводу формул связи между решениями соответствующих дифференциальных уравнений

Литература по композиционному методу построения операторов преобразования:

- Катрахов В.В., Ситник С.М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений.
- Ситник С.М., Шишкина Э.Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя, 2019, ФИЗМАТЛИТ, 224 стр.
- Katrakhov V.V., S.M. Sitnik. Composition method for constructing B-elliptic, B-hyperbolic, and B-parabolic transformation operators // Doklady Mathematics. 1995. Vol. 50, no. 1. P. 70-77.
- Fitouhi A., Jebabli I., Shishkina E.L., Sitnik S.M. Applications of integral transforms composition method to wave-type singular differential equations and index shift transmutations. Electron. J. Differential Equations, Vol. 2018 (2018), No. 130, pp. 1-27.

Фиолетово-чёрная обложка (по группе Пикник)



Ситник Сергей Михайлович —

доктор физико-математических наук, профессор Белгородского государственного национального исследовательского университета. Окончил Воронежский государственный университет (1983 г.), там же защитил кандидатскую (1987 г.) и докторскую (2016 г.) диссертации.

Области научных интересов в математике: теория операторов преобразования, специальные функции, неравенства, интегральные преобразования и операторы, теория приближений, численные методы. Автор более 300 научных публикаций.



Шишкина Элина Леонидовна —

кандидат физико-математических наук, доцент Воронежского государственного университета. Окончила Воронежский государственный университет (2004 г.), там же защитила кандидатскую диссертацию (2006 г.).

Области научных интересов в математике: гиперболические уравнения, дробные производные и интегралы, дифференциальные операторы с особенностями, теория операторов преобразования, специальные функции. Автор более 70 научных публикаций.

Авторы этой книги принадлежат к научной школе известного воронежского математика И.А. Киприянова, который со своими учениками развил теорию дифференциальных уравнений в частных производных с операторами Бесселя, а также рассмотрел их многочисленные приложения.



Следует подчеркнуть, что на русском языке долгое время отсутствовали специализированные монографии, посвященные общей теории операторов преобразования и их приложениям к дифференциальным уравнениям. Монография С.М. Ситника и Э.Л. Шишкиной в определённой степени заполняет этот пробел. Изложим структуру и основное содержание монографии. Отметим, что существенная часть результатов, изложенных в монографии, получена авторами, часть из них публикуется там впервые. Текст монографии разделён на три части. В первой части «Общая теория операторов преобразования» рассматриваются определение операторов преобразования, основные исторические сведения, необходимые факты из теории специальных функций, функциональных пространств и интегральных преобразований. Отметим более подробное изложение свойств преобразования Меллина, включая теорему Слейтер, а также обзор основных конструкций дробного интегродифференцирования. Далее излагаются результаты о различных классах операторов преобразования : Сонина–Пуассона, Бушмана–Эрдейи, Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова. Изложены основные свойства операторов обобщённого сдвига и весовых сферических

Во второй части «Применение метода операторов преобразования к решению уравнений в частных производных» рассматриваются приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи, Сони́на–Катрахова и Пуассона–Катрахова к дифференциальным уравнениям с особенностями в коэффициентах, лемме Копсона, задаче Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, установлению формул связи между решениями дифференциальных уравнений, включая задачу А.В. Бицадзе–В.И. Пашковского для уравнения Максвелла–Эйнштейна, приложения к решению некоторых интегро-дифференциальных уравнений. Здесь же рассмотрен важный вопрос об эквивалентности норм пространств И.А.Киприянова и весовых пространств С.Л.Соболева, а также изучено общее уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу, включая ранее не рассмотренные в литературе случаи особых параметров и начальных условий. Также изложена теория явных представлений для дробных степеней оператора Бесселя, кратко намечены их приложения к некоторым

Шишкина Э.Л. Общее уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу и гиперболические В-потенциалы // Современная математика.

Фундаментальные направления. Уравнения в частных производных. 2019. Т. 65, № 2. С. 157–338.

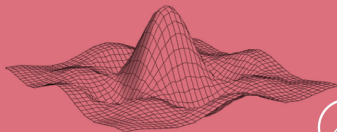
В монографии развивается теория гиперболических уравнений в частных производных с операторами Бесселя, а также конструируются и обращаются гиперболические потенциалы, порожденные многомерным обобщенным сдвигом. Изучены весовые обобщенные функции, связанные с квадратичной формой, которые в дальнейшем применяются для построения дробных степеней гиперболических операторов, а также решений гиперболических уравнений с операторами Бесселя. Изучены гиперболические потенциалы, порожденные многомерным обобщенным сдвигом, реализующие отрицательные вещественные степени сингулярного волнового оператора, т. е. волнового оператора, где вместо вторых производных действует оператор Бесселя, гиперболический В-потенциал Рисса. Рассмотрены различные методы решения общего уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу. Получены решения задач Коши для однородного и неоднородного уравнений указанного типа.

MATHEMATICS IN SCIENCE AND ENGINEERING

Series Editor Goong Chen

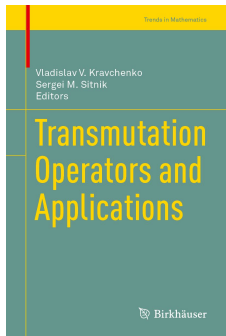
Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics

Elina Shishkina
Sergey Sitnik



Shishkina E.L., Sitnik S.M. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. In the Series: Mathematics in Science and Engineering. Elsevier, Academic Press. 2020. 592 pp.

В опубликованной в 2020 г. издательством Elsevier в основанной Р. Беллманом престижной серии *Mathematics in Science and Engineering* монографии Э.Л. Шишкиной и С.М. Ситника изложены на английском языке для широкой международной профессиональной аудитории основные вопросы современной теории операторов преобразования и их приложений. Существенную часть этой книги занимают результаты Э.Л. Шишкиной по теории обобщённых потенциалов и их приложениям к дифференциальным уравнениям с особенностями.



1st ed. 2020, X, 530 p. 4 illus.

Printed book

Hardcover

119,99 € | £109.99 | \$149.99

[1]128,39 € (D) | 131,99 € (A) | CHF

141,50

eBook

96,29 € | £87.50 | \$109.00

[2]96,29 € (D) | 96,29 € (A) | CHF

Vladislav V. Kravchenko, Sergei M. Sitnik (Eds.)

Transmutation Operators and Applications

Series: Trends in Mathematics

- Compiles a wide range of applications of transmutation theory in one volume
- Leads to new research areas and problems
- Provides material that may be used for teaching, as parts of university courses and programs

Transmutation operators in differential equations and spectral theory can be used to reveal the relations between different problems, and often make it possible to transform difficult problems into easier ones. Accordingly, they represent an important mathematical tool in the theory of inverse and scattering problems, of ordinary and partial differential equations, integral transforms and equations, special functions, harmonic analysis, potential theory, and generalized analytic functions. This volume explores recent advances in the construction and applications of transmutation operators, while also sharing some interesting historical notes on the subject.

Ed. V.V. Kravchenko, S.M. Sitnik. Transmutation Operators and Applications.

In the Series: Trends in Mathematics. Springer, Birkhauser, 2020.
XVII, 686 pp.

Также в 2020 г. в издательстве Springer в серии *Trends in Mathematics* был опубликован сборник работ под редакцией В.В. Кравченко и С.М. Ситника по современной теории операторов преобразования. В сборник вошли работы известных математиков Amin Boumenir, Vu Kim Tuan (USA), Djurdje Cvijovic (Serbia), Tibor K. Pogany (Croatia), Sh. T. Karimov (Uzbekistan), D.B. Karp (Israel, Vietnam, Russia), E.L. Shishkina (Poland), О.В. Скоромник, Л.Е. Хвоцинской (Белоруссия), Ahmed Fitouhi (Tunisia), Yu. F. Luchko (Germany), В.В. Кравченко (Мексика), а также С.М. Ситника, Л. Бритвиной, Е. Прилепкиной, С.П. Хэкало, В.В. Мещерякова, К.О. Политова, А.А. Ларина, А.Б. Муравника, В.Б. Васильева, С. Бутерина, А.В. Глушака, О. Яремко, В.А. Юрко, В.Е. Фёдорова, М.М. Маламуда, А.В. Псху, В.Ф. Молчанова, М.В. Плехановой, И.П. Половинкина, М.В. Шитиковой, Н.В. Зайцевой (Россия). В этом сборнике отражён весь спектр задач современной теории операторов преобразования и их многочисленных приложений.

Frontiers in Mathematics

Vladislav V. Kravchenko

Direct and Inverse Sturm-Liouville Problems

A Method
of Solution

 Birkhäuser

Kravchenko V.V. Forward and Inverse Sturm–Liouville Problems: A Method of Solution.

In the Series: Frontiers in Mathematics. Springer, 2020. 155 pp.

В 2020 г. в издательстве Springer опубликована монография В.В. Кравченко. В этой монографии изложены новые подходы к решению прямых и обратных спектральных задач для уравнения Штурма–Лиувилля на полуоси и оси. На основе предложенных методов разработаны эффективные численные методы для решения этих задач, которые во многом превосходят методы, известные ранее. Методы решения одномерных обратных задач и обратных задач рассеяния традиционно тесно связаны с теорией операторов преобразования и во многом основаны на результатах этой теории. В связи с этой монографией отметим, что её основные идеи в какой-то степени перекликаются с результатами давних работ А.Н. Тихонова, изложение содержания которых и блестящий анализ проведён в статье Ш.А. Алимова. К сожалению, результаты работ нечасто цитируют в современных исследованиях по обратным задачам. Отметим также по применению классической методики теории обратных задач важные работы А.П. Солдатов и Н.А. Жура.

Некоторые статьи по обратным задачам

10. Тихонов А.Н. О единственности решения задачи электроразведки // ДАН. 1949. Т. 69, № 6. С. 797–800.
11. Тихонов А.Н. К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5, № 3. С. 545–547.
12. Алимов Ш.А. О работах А.Н. Тихонова по обратным задачам Штурма–Лиувилля // УМН. 1976. Т. 31, № 6(192). С. 84–88.
13. Жура Н.А., Солдатов А.П. О представлении решения обратной задачи Штурма–Лиувилля на всей оси // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 8. С. 1027–1037.
14. Жура Н.А., Солдатов А.П. К решению обратной задачи Штурма–Лиувилля на всей оси // ДАН России. 2013. Т. 453, № 4. С. 368–372.
15. Zhura N. A., Soldatov A. P. To inverse scattering problem of Gelfand, Levitan, Marchenko // AIP Conf. Proc. 2013. V. 1570, 298.

International Workshop on Transmutation Operators and Related Topics — I. Queretaro, Mexico, CINVESTAV. 2019.

<https://www.math.cinvestav.mx/IWTOR>

Отметим также организованную В.В. Кравченко в октябре 2020 г. в Кэретаро, Мексика, CINVESTAV, первую специализированную конференцию по теории операторов преобразования, получившую сладко звучащее по-русски название TORT (Transmutation Operators and Related Topics). В конференции приняли участие ряд известных математиков В.В. Кравченко, Э.Л. Шишкина, В.С. Рабинович, С. Грудский, С. Торба, С.М. Ситник, Майкл Портер, и ряд других.

ЛИТЕРАТУРА 1

- Катрахов В.В., Ситник С.М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений. Современная математика. Фундаментальные направления. 2018, Том 64, № 2. С. 211–426
- Ситник С.М., Шишкина Э.Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя, 2019, ФИЗМАТЛИТ, 224 стр.
- Sitnik, S. M. Transmutations and Applications : a survey URL: <http://arXiv:1012.3741>.
- Шишкина Э.Л. Общее уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу и гиперболические В–потенциалы // Современная математика. Фундаментальные направления. Уравнения в частных производных. 2019. Т. 65, № 2. С. 157–338.

ЛИТЕРАТУРА 2

- Shishkina E.L., Sitnik S.M. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. In the Series: Mathematics in Science and Engineering. Elsevier, Academic Press. 2020. 592 pp.
- Ed. V.V. Kravchenko, S.M. Sitnik. Transmutation Operators and Applications. In the Series: Trends in Mathematics. Springer, Birkhauser, 2020. XVII, 686 pp.
- Kravchenko V.V. Forward and Inverse Sturm–Liouville Problems: A Method of Solution. In the Series: Frontiers in Mathematics. Springer, 2020. 155 pp.
- International Workshop on Transmutation Operators and Related Topics — I. Queretaro, Mexico, CINVESTAV. 2019.
[https : //www.math.cinvestav.mx/IWTOR](https://www.math.cinvestav.mx/IWTOR)
- Ситник С.М., Шишкина Э.Л., “Рецензия на монографию: Kravchenko V.V. Forward and Inverse Sturm–Liouville Problems: A Method of Solution. Springer, 2020, на англ. языке.(С кратким очерком развития теории обратных задач для уравнения Штурма - Лиувилля)”, Прикладная математика & Физика, 53:1 (2021), 73–84.

Таким образом, теория операторов преобразования и их многочисленных приложений является живой и активной ветвью современной математики. Операторам преобразования и их различным применениям посвящено достаточное число публикаций, в том числе издающихся монографий и сборников.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!