Обобщение моделей случайной миграции

Шишкина Э. Л.

Воронежский государственный университет

Дивноморское,
Мини симпозиум
"New Trends of Stochastic Analysis-2021"
03.06.2021

Обобщение моделей случайной миграции

Задача о случайных блужданиях интересует исследователей уже очень давно. Одна из первых работ Карла Пирсона на эту тему была написана в начале 20-го века

- Pearson K., Blakeman J. *A mathematical theory of random migration*. Drapers' Company research memoirs: Biometric series, XV, — 1919. — P. 1–68.

С момента формулировки этой проблемы Пирсоном появилось множество работ по исследованию моделей случайных блужданий с приложениями в области физики, химии, биологии и т. д.

Обобщение моделей случайной миграции

Однако, эти работы в основном касаются дискретного случая случайного блуждания, в частности, например, когда блуждание происходит по решетке, ориентированной параллельно прямоугольным координатным осям k-мерного евклидова пространства. Сравнительно мало внимания уделяется непрерывному случаю случайного блуждания, в которой направление блуждающего объекта может непрерывно меняться от одного шага к другому.

Обобщение моделей случайной миграции

В 1880 году британским физиком-теоретиком Релеем была исследована задача теории звука, которая математически эквивалентна проблеме случайного блуждания. Он рассмотрел совокупность из n колебаний, каждое с единичной амплитудой, одинаковой частотой и произвольной фазой, и поставил задачу о поиске распределения результирующей интенсивности

- Lord Rayleigh, "On the problem of random vibrations and of random flights in one, two, or three dimensions," The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine, Set. 6, Vol. 37 (1919), 321-347.

Обобщение моделей случайной миграции

Карл Пирсон в совместной работе со своим ассистентом

- Pearson K., Blakeman J. *A mathematical theory of random migration*. Drapers' Company research memoirs: Biometric series, XV, — 1919. — P. 1–68

разработал математическую теорию случайной миграции животных для идеализированной системы, удовлетворяющей следующим условиям.

Обобщение моделей случайной миграции

1. Предполагается, что места размножения и запасы корма имеют в среднем равномерное распределение по рассматриваемому району. Особого следования руслам рек или лесным тропам быть не должно.

Обобщение моделей случайной миграции

2. Предполагается, что особи, распространяющиеся из центра, равномерно распределяются во всех направлениях. Среднее расстояние, на которое особь одного вида передвигается из одной среды обитания в другую, будет называться "перемещением", и может быть n таких "перемещений" от места рождения до места размножения или снова от места размножения до места размножения, если вид воспроизводится более одного раза. "Перемещение" следует отличать от простого передвижения, связанного с поиском пищи или другой краткосрочной целью рядом с местом обитания.

Обобщение моделей случайной миграции

Задача, поставленная Пирсоном, заключалась в том, что если взять центр, сведенный в идеализированной системе к точке, каково будет распределение после n случайных перемещений N особей, перемещающихся из этого центра? Эту задачу Пирсон назвал *фундаментальной проблемой случайной миграции*.

Обобщение моделей случайной миграции

Пусть начало координат O берется в центре, из которого распространяются особи. В произвольном месте на плоскости рассмотрим элементарную круглую область $\Omega_\alpha(C)$ с центром в C, площадью $\alpha \ll 1$. Расстояние от O до C обозначим через r. Пусть $\varphi_n(r^2) \cdot \alpha$ — частота особей на площади α после n-го перемещения, $\varphi_{n+1}(r^2) \cdot \alpha$ — их частота на том же элементе площади после $(n+1)$-го перемещения.

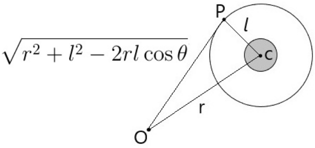


Figure: Схема миграции на n-м перемещении.

Обобщение моделей случайной миграции

Расстояние, на которое отдаляются особи за одно перемещение, обозначим через ℓ. Тогда только те особи, которые, после n-го перемещения, находились на окружности радиуса ℓ с центром в точке C могут попасть в $\Omega_\alpha(C)$ после $(n+1)$-го перемещения, при условии перемещения в определенном направлении. Обозначив через P произвольную точку на окружности с центром в точке C, радиуса ℓ, а угол $\angle PCO$ через θ, получим, что частота особей на круге единичной площади с центром в точке P будет равна $\varphi_n(r^2 + \ell^2 - 2rl\cos\theta)$.

Обобщение моделей случайной миграции

Учитывая, что точка P — произвольная точка окружности, получим, что $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и частота особей в $\Omega_1(C)$ после $(n+1)$-го перемещения будет

$$\varphi_{n+1}(r^2) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi_n(r^2 + \ell^2 - 2r\ell\cos\theta)d\theta.$$

Это общая функциональная зависимость между плотностями при последовательных перемещениях.

Обобщение моделей случайной миграции

После элементарных преобразований, получим

$$\varphi_{n+1}(r) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \varphi_n(\sqrt{r^2+\ell^2-2r\ell\cos\theta})\,d\theta = ({}^1T_r^{\ell}\varphi_n)(r),$$

где $({}^{\gamma}T_x^y f)(x)$ — обобщенный сдвиг, изученный в

- Левитан Б. М. *Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье.* —М. : УМН. — 1951. — Т. 6. — Вып. 2. — С. 102–143,

имеющий вид

$$({}^{\gamma}T_x^y f)(x) = C(\gamma)\int\limits_0^{\pi} f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})\,\sin^{\gamma-1}\varphi\,d\theta, \qquad \gamma > 0,$$

где $C(\gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$.

Обобщение моделей случайной миграции

Таким образом, введя дополнительный параметр $\gamma > 0$, получим обобщенную функциональная зависимость между плотностями при последовательных перемещениях вида

$$\varphi_{n+1}(r) = ({}^{\gamma}T_r^{\ell}\varphi_n)(r).$$

Вероятность $P_n(r)$ того, что особь после n перемещений окажется на расстоянии r или меньше от центра дисперсии равна

$$P_n(r) = C(\gamma)\int\limits_0^r \varphi_{n+1}(\rho^2)\rho^{\gamma}d\rho.$$

Пирсон рассматривал случай, $\gamma = 1$, $\varphi_n(r^2) = C_n J_0(ur)$, где $C_n = DJ_0^n(ul)$, $D = D(l)$ — некоторая функция, независящая от n, u — переменная.

Обобщение моделей случайной миграции

Рассмотрим представленную модель миграции. Пусть h — расстояние, на которое отдаляются особи за одно перемещение. Плотность особей в круге единичной площади на расстоянии r от центра дисперсии, достигаемая на момент времени $t+\tau$ удовлетворяет равенству

$$u(x, t+\tau) = {}^{\gamma}T_x^h u(x, t). \qquad (1)$$

Используя разложение оператора сдвига по формуле Тейлора обеих частей, получим

$$u(x, t+\tau) = u(x, t) + u_t(x, t)\tau + o(\tau), \qquad \tau \to 0.$$

Обобщение моделей случайной миграции

Так же, как обычные операторы сдвига могут быть разложены по степеням оператора дифференцирования D, операторы ${}^{\gamma}T_x^h$ могут быть разложены по степеням оператора Бесселя

$$B_\gamma = \frac{1}{x^\gamma}\frac{\partial}{\partial x}x^\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

по формуле

$$ {}^{\gamma}T_x^h u(x,h) = \sum_{k=0}^{m}\varphi_k(h)B_\gamma^k u(x,t) + R_m(x,h), \qquad (2)$$

где

$$\varphi_k(h) = \frac{1}{k!}\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}+k\right)}\left(\frac{h}{2}\right)^{2k},$$

$$R_m(x,h) = \varphi_{m+1}(h)B_\gamma^{m+1}u(\xi,t)|_{\xi=x+\theta h}, \qquad -1<\theta<1.$$

Обобщение моделей случайной миграции

Мы имеем

$$\varphi_0(y) = 1, \qquad \varphi_1(h) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}+1\right)}\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{2(\gamma+1)}$$

и

$$R_1(x,h) = o(h^2), \qquad h \to 0.$$

Тогда

$${}^{\gamma}T_x^h u(x,t) = u(x,t) + \frac{h^2}{2(\gamma+1)}(B_\gamma)_x u(x,t) + o(h^2), \qquad h \to 0.$$

Подставляя в (1), получаем

$$u_t(x,t) + o(1) = \frac{h^2}{2\tau(\gamma+1)}(B_\gamma)_x u(x,t) + o\left(\frac{h^2}{\tau}\right).$$

Обобщение моделей случайной миграции

Теперь мы видим, что нетривиальная динамика возникает только тогда, когда $\frac{h^2}{2\tau(\gamma+1)} \longrightarrow a$ при некоторой положительной и конечной величины a. Таким образом, мы приходим к уравнению, которому удовлетворяет u вида

$$u_t(x,t) = a(B_\gamma)_x u(x,t).$$

Аналогичным способом, используя подход Марка Каца, получим уравнение

$$\lambda^2 u_{xx}(x,t) = (B_\gamma)_t u(x,t).$$

- Кац М. Несколько вероятностных задач физики и математики. М.: Наука, 1967. 176 с.

Случайные блуждания и уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу дробного порядка

В работе

- Garra R. Random flights related to the Euler-Poisson-Darboux equation / R. Garra, E. Orsingher // Markov processes and related fields. — 2016. — № 22. — P. 87–110.

поставлена, но не решена задача о нахождении решения дробной версии уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу вида (multi-dimensional fractional diffusion-wave equation)

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2a}{t}\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{\beta} u = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < \beta < 1, \tag{3}$$

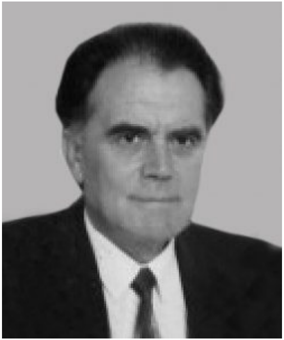
$$u = u(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0.$$

Случайные блуждания и уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу дробного порядка

Определим дробную степень оператора Бесселя $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t}\frac{\partial u}{\partial t} = B_\gamma$. Адамом Макбрайдом явные формулы были выведены в виде композиций дробных интегралов Эрдейи-Кобера на пространствах распределения. Важный шаг был сделан Идой Шпринхайзер-Купер. Ею были получены явные определения в терминах гипергеометрических функций Гаусса. Более общий класс дифференциальных гипербесселевых операторов, связанных с интегральным преобразованием Обрешкова, был рассмотрен И. Димовски и В. Киряковой.

Adam C. McBride,
Руководитель: Arthur Erdélyi

Ida G. Sprinkhuizen-Kuyper,
Руководитель: Tom Koornwinder



Ivan Dimovski

Virginia S. Kiryakova,
Руководитель: Ivan Dimovski

Случайные блуждания и уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу дробного порядка

С.М. Ситником были предложены конструкции дробных степеней оператора Бесселя с гипергеометрической функцией в ядре, которые обобщают левосторонний и правосторонний интегралы Римана–Лиувилля, а также предложены соответтвующие конструкции дробных производных.

- Ситник С.М. Дробное интегродифференцирование для дифференциального оператора Бесселя / С.М. Ситник // Материалы международного Российско–Казахского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики" . Нальчик-Эльбрус, 22-26 мая 2004 г. — Нальчик : — 2004. — С. 163–167.

Случайные блуждания и уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу дробного порядка

Подход С.М. Ситника заключается в использовании композиционного метода, который описан в

- В. В. Катрахов, С. М. Ситник, Метод факторизации в теории операторов преобразования // Мемориальный сборник памяти Бориса Алексеевича Бубнова: неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. (ответственный редактор В.Н. Врагов). Новосибирск. — 1990. — с. 104–122.
- Ситник С.М. Метод факторизации операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений // Вестник Самарского Государственного Университета — Естественнонаучная серия. — № 8/1 (67). — Самара: СамГУ, 2008. — С. 237–248.

Случайные блуждания и уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу дробного порядка

Пусть $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. **Левосторонний дробный интеграл Бесселя на полуоси** $B^{-\alpha}_{\gamma,0+}$ для $f \in L[0,\infty)$ определим формулой

$$(B^{-\alpha}_{\gamma,0+} f)(x) = (IB^{\alpha}_{\gamma,0+} f)(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_0^x \left(\frac{y}{x}\right)^{\gamma} \left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2\alpha-1} {}_2F_1\left(\alpha+\frac{\gamma-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1-\frac{y^2}{x^2}\right) f(y)dy. \tag{4}$$

Пусть $n = [\alpha] + 1$, $f \in L[0,\infty)$, $IB^{n-\alpha}_{\gamma,b-} f, IB^{n-\alpha}_{\gamma,b-} f \in C^{2n}(0,\infty)$. **Левостороннюю дробную производную Бесселя на полуоси типа Герасимова-Капуто** определим равенством

$$(\mathcal{B}^{\alpha}_{\gamma,0+} f)(x) = (IB^{n-\alpha}_{\gamma,0+} B^n_{\gamma} f)(x). \tag{5}$$

Гипергеометрическая функция Гаусса

Гипергеометрическая функция Гаусса внутри круга $|z|<1$ определяется как сумма гипергеометрического ряда

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = F(a,b,c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \tag{6}$$

а для $|z| \geq 1$ получается аналитическим продолжением этого ряда. В (6) параметры a, b, c и переменная z могутбыть комплексными и $c \neq 0, -1, -2, \ldots$. Множитель $(a)_k$ — символ Похгаммера

$$(z)_n = z(z+1)...(z+n-1), \qquad n = 1, 2, ..., \qquad (z)_0 \equiv 1. \tag{7}$$

Гипергеометрическая функция Гаусса

Одним из вариантов аналитического продолжения гипергеометрического ряда есть интеграл

$$ {}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(b-c)} \int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\,dt, \quad (8)$$

$$0 < \mathrm{Re}\, b < \mathrm{Re}\, c, \qquad |\arg(1-z)| < \pi.$$

Случайные блуждания и уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу дробного порядка

Рассмотрим уравнение

$$(\mathcal{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_t u(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 \leq \alpha < 1/2, \qquad \lambda > 0, \tag{9}$$

с условиями

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = 0. \tag{10}$$

Случайные блуждания и уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу дробного порядка

Теорема

Пусть $0 < \alpha \leq 1/2$, $\lambda > 0$ *тогда решение задачи* (9)–(10) *имеет вид*

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{\gamma}^{\alpha}(x-\xi,t) f(\xi) d\xi, \qquad (11)$$

где

$$G_{\gamma}^{\alpha}(x,t) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\lambda\sqrt{\pi}2^{1-\gamma}} t^{-\alpha} \mathbf{H}_{1,3}^{2,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\alpha} \middle| \begin{matrix} \left(1-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right) \\ \left(1-\frac{\alpha-\gamma}{2},\frac{\alpha}{2}\right),(0,1),(\alpha-\gamma,-\alpha) \end{matrix}\right].$$

$f(x)$ *такая, что интеграл в правой части* (11) *сходится.*

Случайные блуждания и уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу дробного порядка

Для целых m, n, p, q таких, что $0 \leq m \leq q$; $0 \leq n \leq p$, $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ и для $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}_+$ $(i = 1, 2, ..., p; j = 1, 2, ..., q)$; H–функция $H_{p,q}^{m,n}(z)$ определяется как интеграл Меллина–Барнса в виде

$$\mathbf{H}_{p,q}^{m,n}(z) = \mathbf{H}_{p,q}^{m,n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix}\right] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{L}} \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) z^{-s} ds, \quad (12)$$

где

$$\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{m} \Gamma(b_j + \beta_j s) \prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)}{\prod\limits_{i=n+1}^{p} \Gamma(a_i + \alpha_i s) \prod\limits_{j=m+1}^{q} \Gamma(1 - b_j - \beta_j s)},$$

$\mathcal{L}$ — некоторый контур, разделяющий полюса двух множителей в числителе.

Случайные блуждания и уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу дробного порядка

Пусть

$$a^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{i=n+1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j - \sum_{j=m+1}^{q} \beta_j,$$

$$\Delta = \sum_{j=1}^{q} \beta_j - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i,$$

$$\mu = \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{i=1}^{p} a_i + \frac{p-q}{2}.$$

Тогда H-функция $\mathbf{H}_{p,q}^{m,n}(z)$ имеет смысл в следующем случае: $\Delta > 0$, $z \neq 0$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-\infty}$ — левая петля, расположенная в горизонтальной полосе, начинающаяся в точке $-\infty + i\varphi_1$ и заканчивающаяся в точке $-\infty + i\varphi_2$ с $-\infty < \varphi_1 < \varphi_2 < +\infty$.

Этот и другие случаи, в которых существует $\mathbf{H}_{p,q}^{m,n}(z)$ представлены на стр. 4, Theorem 1.1 в

- Kilbas, A.A., Saigo, M., 2004. H–Transforms. Theory and Applications. Boca Raton, Florida, Chapman and Hall.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ.