О НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

Залыгаева М.Е.

Воронежский государственный университет

Международный симпозиум "NTSE-2021"

Введение

- В данной работе используется вариант лагранжева подхода к описанию движения жидкости.
- Такое описание с использованием некоторых дополнительных конструкций и аппарата стохастического анализа приводит к классическим уравнениям Бюргерса, Рейнольдса и Навье-Стокса, а также к одной из систем уравнений Осколкова.

Введение

- Уравнение Бюргерса возникает при переходе от лагранжева описания к эйлерову в касательном пространстве в единице группы диффеоморфизмов, а уравнения Рейнольдса, Навье-Стокса и система Осколкова - в касательном пространстве в единице группы диффеоморфизмов, сохраняющих объем, соответственно.
- Эти результаты обобщаются на случай жидкостей, у которых вязкий член имеет общий вид дифференциального оператора второго порядка с матрицей $\tilde{\mathfrak{B}} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathfrak{B}}^{ij}(t))\frac{\partial}{\partial x^i \partial x^j}$, возможно, зависящего от некоторого временного параметра t

Производные в среднем

Пусть $\xi(t)$, $t \in [0, T]$ - случайный процесс в $\mathbb{R}^n$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Нас будут интересовать процессы диффузионного типа, удовлетворяющие следующему уравнению:

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi(s))ds + \mathbf{B}(t)w(t) \tag{1}$$

в $\mathbb{R}^n$ и на плоском торе $\mathcal{T}^n$. В (1) $w(t)$ - Винеровский процесс; $a(t, x)$ - векторное поле; $\mathbf{B}(t)$ - стационарный линейный оператор в $\mathbb{R}^n$.

Производные в среднем

Такой случайный процесс порождает три семейства σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$:

- "прошлое" $\mathcal{P}_t^{\xi(t)}$ - порожденное прообразами борелевских множеств в $\mathbb{R}^n$ при всех отображениях $\xi(t) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ для $s \leq t$;
- "будущее" $\mathcal{F}_t^{\xi}$ - порожденное прообразами борелевских множеств в $\mathbb{R}^n$ при всех отображениях $\xi(t) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ для $s \geq t$;
- "настоящее" $\mathcal{N}_t^{\xi}$ - порожденное самим отображением $\xi(t) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

Производные в среднем

Пусть $Z(t,x)$ - $\mathcal{C}^2$-гладкое векторное поле на $\mathbb{R}^n$.
Следуя Нельсону дадим определения производных в среднем справа и слева поля Z вдоль $\xi(t)$ следующим образом:

$$DZ(t,\xi(t)) = \lim_{\Delta t \to 0+} E_t^{\xi}\left(\frac{Z(t+\Delta t,\xi(t+\Delta t)) - Z(t,\xi(t))}{\Delta t}\right)$$

$$D_*Z(t,\xi(t)) = \lim_{\Delta t \to 0+} E_t^{\xi}\left(\frac{Z(t,\xi(t)) - Z(t-\Delta t,\xi(t-\Delta t))}{\Delta t}\right)$$

$DZ(t,\xi(t))$ и $D_*Z(t,\xi(t))$ имеют регрессии, которые мы обозначим символами DZ и D_*Z, соответственно.

Производные в среднем

Для случайного процесса (1) в $\mathbb{R}^n$ указанные регрессии имеют вид:

$$DZ = \frac{\partial}{\partial t}Z + (a(t,x)\cdot\nabla)Z + \tilde{\mathfrak{B}}(t)Z \tag{2}$$

$$D_*Z = \frac{\partial}{\partial t}Z + (a_*(t,x)\cdot\nabla)Z - \tilde{\mathfrak{B}}(t)Z \tag{3}$$

где $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n})$, $\tilde{\mathfrak{B}}(t) = \frac{1}{2}(\tilde{\mathfrak{B}}^{ij})(t)\frac{\partial}{\partial x^i \partial x^j}$ - дифференциальный оператор второго порядка с матрицей $\tilde{\mathfrak{B}}^{ij}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{B}^*(t)$

Группы диффеоморфизмов

Пусть $\mathcal{T}^n$ - плоский n-мерный тор и $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ - группа соболевских H^s-диффеоморфизмов ($s > n/2+1$) тора $\mathcal{T}^n$ в себя. Для $s > n/2+1$ отображения из H^s являются C^1-гладкими.
Введем следующие операторы

$$B : T\mathcal{T}^n \to \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

$$A(m) : \mathbb{R}^n \to \mathcal{T}^n_m \tag{5}$$

$$\bar{A} : \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n) \times \mathbb{R}^n \to T\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$$

$$\bar{A}_g(X) = TR_g \circ A_e(X) = (A \circ g)(X). \tag{6}$$

Группы диффеоморфизмов

Для произвольной точки $m \in T^n$ обозначим $exp_m : T_m T^n \to T^n$ отображение, которое ставит в соответствие вектору $X \in T_m T^n$ точку $m + X$ на торе T^n, где $m + X$ получается факторизацией относительно целочисленной решетки. Совокупность таких отображений exp во всех точках порождает отображение $\overline{exp} : T_e \mathcal{D}^s(T^n) \to \mathcal{D}^s(T^n)$, которое переводит вектор $X \in T_e \mathcal{D}^s(T^n)$ в $e + X \in \mathcal{D}^s(T^n)$, где $e + X$ - диффеоморфизм тора T^n следующего вида: $(e + X)(m) = m + X(m)$.

Группы диффеоморфизмов

Пусть $w(t)$ - винеровский процесс в $\mathbb{R}^n$, определенный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Построим новый случайный процесс

$$W(t) = \overline{exp} \circ \bar{A}_e(\mathbf{B}(t)w(t)) \tag{7}$$

в $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, где $\mathbf{B}(t)$ - постоянный линейный оператор из уравнения (1).

Вязкая гидродинамика

- Пусть $g(t)$ - геодезическая на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ с начальными условиями $g(0) = e$ и $\dot{g}(0) = v_0 \in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.
- Рассмотрим $v(t) = \dot{g}(t) \circ g^{-1}(t) \in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Этот бесконечномерный вектор может быть рассмотрен как векторное поле на $\mathcal{T}^n$, которое мы обозначим $v(t, m)$.
- Введем на $\mathcal{T}^n$ векторное поле $V(t, m) = E(v(t, m - \mathbf{B}(t)w(t)))$ (в бесконечномерной записи $V(t) = E(Q_e TR^{-1}_{W(t)} v(t))$, где E понимается как обычное математическое ожидание).

Вязкая гидродинамика

Теорема.
Векторное поле $V(t,m)$ удовлетворяет аналогу уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial}{\partial t}V(T-t,m)+(V(T-t,m)\cdot\nabla)V(T-t,m)-\tilde{\mathfrak{B}}(t)V(T-t,m)=0,$$

где $\tilde{\mathfrak{B}}(t)$ - дифференциальный оператор второго порядка $\tilde{\mathfrak{B}}(t)=\frac{1}{2}(\tilde{\mathfrak{B}}^{ij})(t)\frac{\partial}{\partial x^i\partial x^j}$, с матрицей $\tilde{\mathfrak{B}}^{ij}(t)=\mathbf{B}(t)\mathbf{B}^*(t)$

Вязкая гидродинамика. Случай несжимаемой жидкости

- Пусть $g(t)$ – кривая на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ - группе соболевских H^s-диффеоморфизмов $\mathcal{T}^n$, сохраняющих объем $(s > n/2 + 1)$ удовлетворяющая уравнению

$$\frac{D}{dt}\dot{g}(t) = F(t, g(t), \dot{g}(t)), \tag{8}$$

где F - внешняя сила.

- Рассмотрим $u(t) = \dot{g}(t) \circ g^{-1}(t) \in \mathcal{T}_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ и винеровский процесс $W(t)$, заданный соотношением (7).
- Введем на $\mathcal{T}^n$ векторное поле

$$U(t, m) = E(u(t, m - \int\limits_0^t B(s)dw(s))). \tag{9}$$

Также запишем его как конечномерный вектор $U(t) = E(Q_e TR^{-1}_{W(t)} u(t))$.

Вязкая гидродинамика. Случай несжимаемой жидкости

Теорема. *Векторное поле $U(t,m)$ удовлетворяет аналогу уравнения Рейнольдса*

$$\frac{\partial}{\partial t}U+E\left[((U\cdot\nabla)U)(t,m-\int\limits_0^t B(s)dw(s))\right]-\tilde{\mathfrak{B}}(t)U-gradp=0,$$

где $\tilde{\mathfrak{B}}(t)$ - дифференциальный оператор второго порядка $\tilde{\mathfrak{B}}(t)=\frac{1}{2}(\tilde{\mathfrak{B}}^{ij})(t)\frac{\partial}{\partial x^i\partial x^j}$, с матрицей $\tilde{\mathfrak{B}}^{ij}(t)=\mathbf{B}(t)\mathbf{B}^*(t)$

Вязкая гидродинамика. Случай несжимаемой жидкости

Отметим, что

$$E\left[((U\cdot\nabla)U)(t, m-\int\limits_0^t B(s)dw(s))\right] = (U\cdot\nabla)U + E\left[(\check{U}_{u(t)}\cdot\nabla)\check{U}_{u(t)}\right]$$

Это помогает преобразовать предыдущее уравнение в аналог стандартной формы уравнения Рейнольдса

$$\frac{\partial}{\partial t}U + (U\cdot\nabla)U - \tilde{\mathfrak{B}}(t)U - gradp = E\left[(\check{U}_{u(t)}\cdot\nabla)\check{U}_{u(t)}\right].$$

Вязкая гидродинамика. Случай несжимаемой жидкости

- Введем специальную случайную силу по формуле
$$\mathfrak{F}_\omega(t, X_\omega) = Q_e TR_{W(t)} PE\left[(\breve{U}_{X_\omega}\cdot\nabla)\breve{U}_{X_\omega}\right],$$
где $X_\omega(m) \in \mathcal{T}_e\mathcal{D}^{s+1}_\mu(\mathcal{T}^n)$ – случайное бездивергентное H^{s+1}-векторное поле.
- Введем правоинвариантное силовое поле $\bar{\mathfrak{F}}_\omega(t, Y_\omega) = TR_g\mathfrak{F}_\omega(t, TR_g^{-1}Y_\omega)$, где $TR_g^{-1}Y_\omega$ – бездивергентное H^{s+1}-векторное поле.
- Рассмотрим на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ уравнение
$$\frac{\bar{D}}{dt}\dot{g}_\omega(t) = \bar{\mathfrak{F}}_\omega(t, g_\omega(t), \dot{g}_\omega(t)).$$
- Рассмотрим бездивергентное H^{s+1}-векторное поле $u_\omega(t,m) = \dot{g}_\omega(t,m)\circ g_\omega^{-1}(t,m)$.
- Рассмотрим векторное поле
$$\mathbb{U} = E\left(u_\omega(t, m - \int_0^t B(s)dw(s)_\omega)\right)$$

Вязкая гидродинамика. Случай несжимаемой жидкости

Теорема.
Векторное поле $\mathbb{U}$, удовлетворяет аналогу уравнения Навье-Стокса

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{U} + (\mathbb{U} \cdot \nabla)\mathbb{U} - \tilde{\mathfrak{B}}(t)\mathbb{U} - gradp = 0,$$

где $\tilde{\mathfrak{B}}(t)$ - дифференциальный оператор второго порядка $\tilde{\mathfrak{B}}(t) = \frac{1}{2}(\tilde{\mathfrak{B}}^{ij})(t)\frac{\partial}{\partial x^i \partial x^j}$, с матрицей $\tilde{\mathfrak{B}}^{ij}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{B}^*(t)$.

Вязкая гидродинамика. Случай несжимаемой жидкости

- Пусть кривая $g(t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера с внешними силами

$$\frac{\partial}{\partial t}u + (u, \nabla)u - gradp = TR^{-1}_{W(t)}\Delta\frac{\partial}{\partial t}u(t).$$

- Рассмотрим H^{s+1}-векторное поле $u_\omega(t, m)$ на $\mathcal{T}^n$, заданное соотношением $u_\omega(t, m) = \dot{g}_\omega(t, m) \circ g_\omega^{-1}(t, m)$.
- Построим векторное поле

$$\mathbb{U} = E\left(u_\omega(t, m - \int\limits_0^t B(s)dw(s)_\omega)\right)$$

.

Вязкая гидродинамика. Случай несжимаемой жидкости

Теорема.
Векторное поле $\mathbb{U}$ *удовлетворяет системе уравнений Осколкова*

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{U} - E\left[((\mathbb{U}\cdot\nabla)\mathbb{U})(t, m - \int\limits_0^t B(s)dw(s))\right] -$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\Delta\mathbb{U} - \frac{\sigma^2}{2}\Delta\mathbb{U} - gradp = 0,$$

моделирующей динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта порядка 0 с внешним воздействием.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !