Об одном подходе к изучению стохастических уравнений леонтьевского типа с импульсными воздействиями

Машков Е. Ю.

Юго-Западный государственный университет, г. Курск
E-mail: mashkovevgen@yandex.ru

2021

Слайд 2. Системы леонтьевского типа

Под системой леонтьевского типа понимается класс дифференциальных уравнений в R^n вида

$$A\dot{x}(t) = Bx(t) + f(t),$$

где $x(t)$ и $f(t)$ – вектор-функции, A и B – постоянные $n \times n$-матрицы.
При некоторых дополнительных предположениях система моделирует межотраслевую экономику "затраты-выпуск"Леонтьева с учетом запасов.

Слайд 3. Области применения

- На языке систем леонтьевского типа в работах А. Л. Шестакова, Г. А. Свиридюка и А. В. Келлер изучается динамическое искаженние сигналов в радиоустройствах.
- В работах Л. А. Власенко, А. Г. Руткаса, М. С. Филипковской, а также O. Schein, G. Denk, T. Sickenberger, R. Winkler рассматриваемые системы возникают при математическом моделировании колебаний и электрических цепей.
- Уравнения леонтьевского типа возникают в работах Л. А. Власенко, Ю. Г. Лысенко, А. Г. Руткаса при математическом моделировании динамики корпорации предприятий при использовании инвестирования.

Слайд 4. Области применения

- Отметим также работы Ю. Е. Бояринцева и В. Ф. Чистякова, А.А. Белова и А.П. Курдюкова, Г. В. Демиденко, С. М. Чуйко, A. Alabert, S. L. Campbell, в которых очень обстоятельно изучены дифференциально-алгебраические системы.

Слайд 5. Стохастические уравнения леонтьевского типа

Особую важность для приложений представляет случай, когда в правой части системы присутствуют помехи, т.е. случайные возмущения типа белого шума $\dot{w}(t)$, т. е. оно имеет вид

$$A\dot{\xi}(t) = B\xi(t) + f(t) + \dot{w}(t),$$

где $f(t)$ – входящий сигнал в устройство, описываемое операторами A и B, а $\xi(t)$ – это то, что мы получаем на выходе из устройства.

Слайд 6. Стохастические уравнения леонтьевского типа

В интегральной форме

$$A\xi(t) = B\int_0^t \xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + w(t),$$

Для изучения систем леонтьевского типа требуется рассмотрение производных достаточно высоких порядков от свободных членов – в данном случае, детерминированного слагаемого и винеровского процесса или белого шума. Как известно, производные винеровского процесса существуют только в смысле обобщенных функций, которые крайне трудны для применения в конкретных уравнениях. Это обстоятельство делает исследование уравнения сложным.

Слайд 7. Стохастические уравнения леонтьевского типа

Предлагаемый в работе метод исследования стохастической системы основан на применении аппарата производных в среднем по Нельсону от случайных процессов, для описания которых не используются обобщенные функции. Отметим, что понятие производных в среднем было введено Э. Нельсоном в 60-х годах XX века для нужд построенной им стохастической механики (вариант квантовой механики). Мы применяем симметрические производные в среднем (текущие скорости) винеровского процесса. Текущие скорости являются естественными аналогами физической скорости детерминированных процессов.

Слайд 8. Стохастические уравнения леонтьевского типа

Альтернативный метод исследования рассматриваемых систем со случайными возмущениями, также основанный на использовании производных в среднем, разработан А. Л. Шестаковым и Г. А. Свиридюком.

Слайд 9. Условное математическое ожидание

$L_2(\Omega, F, P)$ – гильбертово пространство случайных величин, суммируемых с квадратом. F_0 – σ-подалгебра в F.
$L_2(\Omega, F_0, P)$ – гильбертово пространство суммируемых с квадратом случайных величин, измеримых относительно F_0
$Q : L_2(\Omega, F, P) \to L_2(\Omega, F_0, P)$ – ортогональный проектор

Определение 1

Для любого $\xi \in L_1(\Omega, F, P)$ случайная величина $Q\xi \in L_1(\Omega, F_0, P)$ называется условным математическим ожиданием ξ относительно F_0 и обозначается $E(\xi|F_0)$

Слайд 10. Определения производных в среднем

Определение 2

- (i) Производная в среднем справа $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина вида

$$D\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^{\xi}\left(\frac{\xi(t+\triangle t) - \xi(t)}{\triangle t}\right),$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ и $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к 0 и $\triangle t > 0$.

- (ii) Производная в среднем слева $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина

$$D_*\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^{\xi}\left(\frac{\xi(t) - \xi(t-\triangle t)}{\triangle t}\right),$$

где условия и обозначения такие же как и в (i).

Слайд 11. Определения производных в среднем

Известно, что $D\xi(t)$ и $D_*\xi(t)$ могут быть представлены как суперпозиции $\xi(t)$ и борелевских векторных полей $Y^0(t,x)$ и $Y^0_*(t,x)$ соответственно на R^n, то есть,

$$D\xi(t) = Y^0(t,\xi(t)), \quad D_*\xi(t) = Y^0_*(t,\xi(t)).$$

Слайд 12. Текущая и осмотическая скорости случайных процессов

Определение 3

- Производная $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ называется симметрической производной в среднем.
- Производная $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$ называется антисимметрической производной в среднем.

Рассмотрим векторные поля $v^\xi(t,x) = \frac{1}{2}(Y^0(t,x) + Y^0_*(t,x))$ и $u^\xi(t,x) = \frac{1}{2}(Y^0(t,x) - Y^0_*(t,x))$.

Определение 4

- $v^\xi(t) = v^\xi(t,\xi(t)) = D_S\xi(t)$ называется текущей скоростью процесса $\xi(t)$;
- $u^\xi(t) = u^\xi(t,\xi(t)) = D_A\xi(t)$ называется осмотической скоростью процесса $\xi(t)$.

Слайд 13. Текущая и осмотическая скорости случайных процессов

$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t \beta(s)ds + w(t)$ - процесс Ито
Для процесса Ито векторное поле $u^\xi(t,x)$ представимо в виде

$$u^\xi(t,x) = \frac{1}{2} grad \ln \rho^\xi(t,x),$$

а векторное поле $v^\xi(t,x)$ удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho^\xi(t,x)}{\partial t} = -div(\rho^\xi v^\xi).$$

Слайд 14. Производные в среднем винеровского процесса

Известно, что для $t \in (0, l]$

$$D_S w(t) = \frac{w(t)}{2t}$$

Имеет место

Лемма 5

При целом $k \geq 2$

$$D_S^k w(t) = (-1)^{k-1} \frac{\prod_{i=1}^{k-1}(2i-1)}{2^k} \frac{w(t)}{t^k}.$$

Слайд 15. Еще одна производная

Лемма 6

Пусть $w(t)$ – n-мерный винеровский процесс, $P(t)$ – достаточно гладкая $k \times n$-матрица, $t \in (0, T)$. Тогда для любого t имеет место формула

$$D_S^w \int_0^t P(s)dw(s) = P(t)\frac{w(t)}{2t}.$$

Слайд 16. Основной результат

Рассматривается система стохастических дифференциальных уравнений в R^n вида

$$\tilde{A}\xi(t) = \int_0^t \tilde{B}\xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + S\zeta(t) + \int_0^t P(s)dw(s),$$

где $\tilde{B} + \lambda\tilde{A}$ – регулярный пучок матриц размера $n \times n$, $\tilde{A}$ - вырождена, $\tilde{B}$ - невырождена; $\xi(t)$ – искомый случайный процесс, $w(t)$ – винеровский процесс в R^n, $P(t)$ - достаточно гладкая $n \times n$ - матрица, S - числовая $n \times n$ - матрица, $\zeta(t)$ - n-мерный процесс скачков, $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная вектор-функция.

$$\zeta(t,\omega) = \sum_{r=1}^{N} \tilde{\zeta}_r(\omega)\chi(t - t_r), \;\; 0 < t_1 < \cdots < t_N < T,$$

Слайд 17. Приведение к каноническому виду

$$\tilde{A}\xi_0(t) - \tilde{A}\xi_0(0) = \tilde{B}\int_0^t \xi_0(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t P(s)dw(s),$$

$$0 \le t \le t_1,\ (r = 0),$$

$$\tilde{A}\xi_r(t) - \tilde{A}\xi_r(t_r) = \tilde{B}\int_{t_r}^t \xi_r(s)ds + \int_{t_r}^t f(s)ds + \int_{t_r}^t P(s)dw(s),$$

$$t_r \le t \le t_{r+1},$$

Слайд 18. Приведение к каноническому виду

$$\tilde{A}\xi_N(t) - \tilde{A}\xi_N(t_N) = \tilde{B}\int_{t_N}^{t} \xi_N(s)ds + \int_{t_N}^{t} f(s)ds + \int_{t_N}^{t} P(s)dw(s),$$

$$t_N \leq t \leq T,$$

$$r = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\xi_0(0) = 0, \;\; \tilde{A}\xi_r(t_r) = \tilde{A}\xi_{r-1}(t_r, \omega) + S\tilde{\zeta}_r(\omega), \;\; r = 1, \dots, N.$$

Слайд 19. Обобщенная вещественная форма Шура

Теорема

Для регулярного пучка $\lambda A + B$ вещественных постоянных $n \times n$ - матриц A и B найдутся вещественные ортогональные матрицы Q_L и Q_R, такие, что матрица $Q_L A Q_R$ – верхняя квазитреугольная (т.е. верхняя блочно-треугольная матрица с диагональными блоками размера 1×1 и 2×2; блоки размера 1×1 соответствуют вещественным собственным значениям, а блоки размера 2×2 – сопряженным парам комплексных собственных значений), а матрица $Q_L B Q_R$ – верхняя треугольная.

Слайд 20. Преобразование Шура

$$Q_L\tilde{A}Q_RQ_R^{-1}\xi(t) = \int_0^t Q_L\tilde{B}Q_RQ_R^{-1}\xi(s)ds + \int_0^t Q_Lf(s)ds+$$

$$+Q_LS\zeta(t) + \int_0^t P_LP(s)dw(s),$$

$$A = Q_L\tilde{A}Q_R$$

$$B = Q_L\tilde{B}Q_R$$

Слайд 21. Матрица A

$$
\begin{matrix}
a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & a^1_4 & \dots & a^1_i & a^1_{i+1} & a^1_{i+2} & \dots & a^1_j & a^1_{j+1} & \dots & a^1_p & a^1_{p+1} & a^1_{p+2} & \dots & a^1_n \\
a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & a^2_4 & \dots & a^2_i & a^2_{i+1} & a^2_{i+2} & \dots & a^2_j & a^2_{j+1} & \dots & a^2_p & a^2_{p+1} & a^2_{p+2} & \dots & a^2_n \\
0 & 0 & a^3_3 & a^3_4 & \dots & a^3_i & a^3_{i+1} & a^3_{i+2} & \dots & a^3_j & a^3_{j+1} & \dots & a^3_p & a^3_{p+1} & a^3_{p+2} & \dots & a^3_n \\
0 & 0 & a^4_3 & a^4_4 & \dots & a^4_i & a^4_{i+1} & a^4_{i+2} & \dots & a^4_j & a^4_{j+1} & \dots & a^4_p & a^4_{p+1} & a^4_{p+2} & \dots & a^4_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a^i_i & a^i_{i+1} & a^i_{i+2} & \dots & a^i_j & a^i_{j+1} & \dots & a^i_p & a^i_{p+1} & a^i_{p+2} & \dots & a^i_n \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a^{i+1}_i & a^{i+1}_{i+1} & a^{i+1}_{i+2} & \dots & a^{i+1}_j & a^{i+1}_{j+1} & \dots & a^{i+1}_p & a^{i+1}_{p+1} & a^{i+1}_{p+2} & \dots & a^{i+1}_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a^j_j & a^j_{j+1} & \dots & a^j_p & a^j_{p+1} & a^j_{p+2} & \dots & a^j_n \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a^{j+1}_{j+1} & \dots & a^{j+1}_p & a^{j+1}_{p+1} & a^{j+1}_{p+2} & \dots & a^{j+1}_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a^p_{p+1} & a^p_{p+2} & \dots & a^p_n \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a^{p+1}_{p+2} & \dots & a^{p+1}_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a^{n-1}_n \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{matrix}
$$

Слайд 22 Матрица B

$$
\begin{matrix}
b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 & b_4^1 & \dots & b_i^1 & b_{i+1}^1 & b_{i+2}^1 & \dots & b_j^1 & b_{j+1}^1 & \dots & b_p^1 & b_{p+1}^1 & b_{p+2}^1 & \dots & a_n^1 \\
0 & b_2^2 & b_3^2 & b_4^2 & \dots & b_i^2 & b_{i+1}^2 & b_{i+2}^2 & \dots & b_j^2 & b_{j+1}^2 & \dots & b_p^2 & b_{p+1}^2 & b_{p+2}^2 & \dots & a_n^2 \\
0 & 0 & b_3^3 & b_4^3 & \dots & b_i^3 & b_{i+1}^3 & b_{i+2}^3 & \dots & b_j^3 & b_{j+1}^3 & \dots & b_p^3 & b_{p+1}^3 & b_{p+2}^3 & \dots & b_n^3 \\
0 & 0 & 0 & b_4^4 & \dots & b_i^4 & b_{i+1}^4 & b_{i+2}^4 & \dots & b_j^4 & b_{j+1}^4 & \dots & b_p^4 & b_{p+1}^4 & b_{p+2}^4 & \dots & b_n^4 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_i^i & b_{i+1}^i & b_{i+2}^i & \dots & b_j^i & b_{j+1}^i & \dots & b_p^i & b_{p+1}^i & b_{p+2}^i & \dots & b_n^i \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{i+1}^{i+1} & b_{i+2}^{i+1} & \dots & b_j^{i+1} & b_{j+1}^{i+1} & \dots & b_p^{i+1} & b_{p+1}^{i+1} & b_{p+2}^{i+1} & \dots & b_n^{i+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_j^j & b_{j+1}^j & \dots & b_p^j & b_{p+1}^j & b_{p+2}^j & \dots & b_n^j \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{j+1}^{j+1} & \dots & b_p^{j+1} & b_{p+1}^{j+1} & b_{p+2}^{j+1} & \dots & b_n^{j+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & b_p^p & b_{p+1}^p & b_{p+2}^p & \dots & b_n^p \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{p+1}^{p+1} & b_{p+2}^{p+1} & \dots & b_n^{p+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{n-1}^{n-1} & \dots & b_n^{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_n^n
\end{matrix}
$$

Слайд 23. Приведение к каноническому виду

Обозначим $\eta(t) = P_R^{-1}\xi(t)$, $C(t) = Q_L P(t)$. В новых обозначениях данное уравнение принимает вид

$$A\eta(t) = \int_0^t B\eta(s)ds + \int_0^t Q_L f(s)ds + M\zeta(t) + \int_0^t C(s)dw(s),$$

$$M = Q_L S$$

Слайд 24. Приведение к каноническому виду

$$A\eta_0(t) - A\eta_0(0) = \int_0^t B\eta_0(s)ds + \int_0^t Q_L f(s)ds + \int_0^t C(s)dw(s),$$

$$0 \le t \le t_1,$$

$$A\eta_r(t) - A\eta_r(t_r) = \int_{t_r}^t B\eta_r(s)ds + \int_{t_r}^t Q_L f(s)ds + \int_{t_r}^t C(s)dw(s),$$

$$t_r \le t \le t_{r+1},$$

Слайд 25. Приведение к каноническому виду

$$A\eta_N(t) - A\eta_N(t_N) = \int_{t_N}^{t} B\eta_N(s)ds + \int_{t_N}^{t} Q_L f(s)ds + \int_{t_N}^{t} C(s)dw(s),$$

$$t_N \leq t \leq T,$$

$$r = 1, \ldots, N-1,$$

$$\eta_0(0) = 0, \quad A\eta_r(t_r) = A\eta_{r-1}(t_r, \omega) + M\tilde{\zeta}_r(\omega), \quad r = 1, \ldots, N$$

Слайд 26. Формулы для решений

1) пусть компоненты случайной величины $Q_L S\tilde{\zeta}_r(\omega)$, соответствующие вырожденным блокам размера 1×1 на главной диагонали в A, равны нулю, $r = 1, 2, \ldots, N$, тогда для подсистемы, соответствующей строкам A с рассматриваемыми вырожденными блоками, имеет место при $0 < t < T$ рекурентная формула для нахождения решений вида

$$\eta^n(t) = -\frac{1}{b_n^n} g^n(t) - \frac{1}{b_n^n} \sum_{j=1}^{n} c_j^n(t) \frac{w^j}{2t},$$

$$D_S \left(\sum_{j=i+1}^{n} a_j^i \cdot \eta^j(t) \right) = \sum_{j=i}^{n} b_j^i \cdot \eta^j(t) + g^i(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j^i(t) \cdot \frac{w^j}{2t},$$

$$p \leq i \leq n-1$$

2) зафиксировав сколь угодно малый момент времени $t_0 > 0$, мы в знаменателях процессов, удовлетворяющих приведенным в пункте 1) рекурентным соотношениям, заменяем t на $t_0(t)$ по формуле

$$t_0(t) = \begin{cases} t_0, \text{ если } 0 \leq t \leq t_0; \\ t, \text{ если } t_0 \leq t. \end{cases}$$

и получаем процессы, принимающие при $t = 0$ нулевые значения, но становятся решениями только при $t_0 \leq t < T$;

Слайд 28. 3)

$$\eta^j(t) = \sum_{r=1}^{N} e^{\frac{b^j_j}{a^j_j}(t-t_r)} \cdot \left(\frac{m^j_1 \tilde{\zeta}^1_r}{a^j_j} + \dots + \frac{m^j_n \tilde{\zeta}^n_r}{a^j_j} \right) \cdot \chi(t-t_r) +$$

$$+ \int_0^t e^{\frac{b^j_j}{a^j_j}(t-u)} \frac{c^j_1(u)}{a^j_j} dw^1_u + \int_0^t e^{\frac{b^j_j}{a^j_j}(t-u)} \frac{c^j_2(u)}{a^j_j} dw^2_u + \dots +$$

$$+ \int_0^t e^{\frac{b^j_j}{a^j_j}(t-u)} \frac{c^j_n(u)}{a^j_j} dw^n_u + \int_0^t e^{\frac{b^j_j}{a^j_j}(t-u)} [\frac{1}{a^j_j} g^j(u) + \frac{b^j_{j+1}}{a^j_j} \eta^{j+1}(u) +$$

$$+ \ldots + \frac{b^j_n}{a^j_j} \eta^n(u) - \frac{b^j_j}{(a^j_j)^2} (a^j_{j+1} \eta^{j+1}(u) + \ldots + a^j_n \eta^n(u))] du -$$

$$- \frac{a^j_{j+1}}{a^j_j} \eta^{j+1} - \ldots - \frac{a^j_n}{a^j_j} \eta^n.$$

Слайд 29. Формулы для решений

4) для подсистем, соответствующих строкам A с невырожденными блоками размера 2×2, имеет место аналитическая формула для решений вида

$$\begin{aligned}\bar{\eta}(t) = \sum_{r=1}^{N} e^{K(t-t_r)}\Lambda \left((M\tilde{\zeta}_r(\omega))^j\right)_{j=i}^{i+1} \cdot \chi(t-t_r) + \\ + \int_0^t e^{K(t-\tau)} \left(\theta(\tau) + \bar{g}(\tau) - K\vartheta(\tau)\right) d\tau + \\ + \int_0^t e^{K(t-\tau)}\Lambda\Theta(\tau) dw(\tau) - \vartheta(t),\end{aligned}$$

где $\left((M\tilde{\zeta}_r(\omega))^j\right)_{j=i}^{i+1}$ – 2-мерный вектор, составленный i-й и $(i+1)$-й координат вектора $M\tilde{\zeta}_r(\omega)$.

Слайд 30. Формулы для решений

$$\bar{\eta}_r = \begin{pmatrix} \eta_r^i \\ \eta_r^{i+1} \end{pmatrix}, \quad \Xi = \begin{pmatrix} b_i^i & b_{i+1}^i \\ 0 & b_{i+1}^{i+1} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} a_i^i & a_{i+1}^i \\ a_i^{i+1} & a_{i+1}^{i+1} \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\vartheta(t) = \Lambda \begin{pmatrix} a_{i+2}^i & \cdots & a_n^i \\ a_{i+2}^{i+1} & \cdots & a_n^{i+1} \end{pmatrix} \left(\eta^{i+2} \ldots \eta^n\right)^T,$$

$$\theta(t) = \Lambda \begin{pmatrix} b_{i+2}^i & \cdots & b_n^i \\ b_{i+2}^{i+1} & \cdots & b_n^{i+1} \end{pmatrix} \left(\eta^{i+2} \ldots \eta^n\right)^T,$$

$$\bar{g} = \Lambda \begin{pmatrix} g^i \\ g^{i+1} \end{pmatrix}, \quad K = \Lambda\Xi, \quad \Theta(t) = \begin{pmatrix} c_1^i(t) & \cdots & c_n^i(t) \\ c_1^{i+1}(t) & \cdots & c_n^{i+1}(t) \end{pmatrix}$$

Слайд 31. Случай с непрерывными матрицами, зависящими от времени

Рассматривается стохастическая система дифференциально-алгебраического типа

$$dL(t)\xi(t) = M(t)\xi(t)dt + f(t)dt + N(t)dw(t),\ S\xi(0) = a, \quad (4)$$

где $\xi(t) \in R^n$ – искомый случайный процесс, $L(t)$, $M(t)$, $N(t)$ – вещественные непрерывные $m \times n$-матрицы, причем в случае с квадратными матрицами (когда $m = n$) $L(t)$ вырождена ($detL(t) \equiv 0$ на промежутке $[0, T]$), S – постоянная $m \times n$-матрица, $f(t) \in R^m$ – интегрируемая вектор-функция, $w(t) \in R^n$ – винеровский процесс, $a \in R^m$ – постоянный вектор.

Слайд 32. Случай с непрерывными матрицами

Введем в рассмотрение следующие матрицы: $P_0 = E - L^+ L$,
$P_1 = P_0(MP_0)^+ MP_0$, $Q_1 = P_0(SP_0)^+ SP_0$,
$P_2 = P_0 - P_1$, $Q_2 = P_0 - Q_1$,
$P_3 = P_2(SP_2)^+ SP_2$, $Q_3 = Q_2(MQ_2)^+ MQ_2$,
$P_4 = P_2 - P_3$, $Q_4 = Q_2 - Q_3$,

$$\Xi = \begin{pmatrix} E - SP_2(SP_2)^+ & 0 \\ 0 & E - MQ_2(MQ_2)^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & -S \\ M & -M \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} P_0(MP_0)^+ M & 0 \\ 0 & P_0(SP_0)^+ S \end{pmatrix},$$

$\Phi_1 = \begin{pmatrix} P_0(MP_0)^+ M & 0 \end{pmatrix} (E - \Xi^+ \Xi), \Phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & P_0(SP_0)^+ S \end{pmatrix} (E - \Xi^+ \Xi$

$$\Lambda = SL^+(0)X(0), \quad G = \int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]X(s)ds,$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = M(t)L^+(t)X(t), \quad X(0) = E.$$

Слайд 33. Теорема 11

Теорема 11 *Пусть в задаче (4) для матриц $L(t)$, $M(t)$, S выполняются тождества*

$$[E - L(t)L^+(t)]X(t)X^{-1}(s)M(s)\Phi_1(s) = 0, \tag{5}$$

$$[E - (\Lambda - \Lambda G^+G)(\Lambda - \Lambda G^+G)^+]S\Phi_2(t) = 0, \quad t, s \in [0, T]. \tag{6}$$

Тогда для того, чтобы задача имела решение, необходимо и достаточно выполнения условий

$$[E - L(t)L^+(t)]X(t)G^+\{\int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]z(s)ds+$$

$$+\int_0^T X^*(s)[E - L(t)L^+(t)]X(s)[\int_0^s X^{-1}(u)N(u)dw(u)]ds\} =$$

$$= [E - L(t)L^+(t)]\{z(t) + X(t)\int_0^t X^{-1}(s)N(s)dw(s)\}, \tag{7}$$

Слайд 34. Теорема 11

$$[E-(\Lambda-\Lambda G^{+}G)(\Lambda-\Lambda G^{+}G)^{+}]\{a+$$

$$+\Lambda G^{+}[\int_0^T X^{*}(s)[E-L(s)L^{+}(s)]z(s)ds+$$

$$+\int_0^T X^{*}(s)[E-L(s)L^{+}(s)]X(s)[\int_0^s X^{-1}(u)N(u)dw(u)]ds]\}=0, \tag{8}$$

где $z(s)$ *является решением следующей задачи Коши:*

$$dz(t)=M(t)L^{+}(t)z(t)dt+f(t)dt,\;\; z(0)=0.$$

Слайд 35. Теорема 12

Теорема 12 *Если в задаче (4)*

$$dL(t)\xi(t) = M(t)\xi(t)dt + f(t)dt + N(t)dw(t),\ S\xi(0) = a \quad (4)$$

матрицы $L(t)$, $M(t)$, S удовлетворяют равенствам (5), (6) и задача имеет решение, то ее общее решение записывается двумя способами:

$$\xi(t) = L^+(t)\eta(t) + H_1(t)r(t) + P_4(t)r_0(t),$$
$$\xi(t) = L^+(t)\eta(t) + H_2(t)r(t) + Q_4(t)r_0(t),$$

где матрицы $H_1(t)$, $H_2(t)$ вычисляются по формулам

$$H_1 = [E - P_2(SP_2)^+S]\Phi_1 + P_2(SP_2)^+S\Phi_2,$$
$$H_2 = [E - Q_2(MQ_2)^+M]\Phi_2 + Q_2(MQ_2)^+M\Phi_1,$$

Слайд 36. Теорема 12

$r(t)$, $r_0(t)$ – произвольные непрерывные векторы, а $\eta(t)$ является решением уравнения Ито

$$d\eta(t) = M(t)L^+(t)\eta(t)dt + M(t)\Phi_1(t)r(t)dt + f(t)dt + N(t)dw(t)$$

с начальным условием

$$\eta(0) = -[E - (E - G^+G)(\Lambda - \Lambda G^+G)^+\Lambda]\cdot$$

$$\cdot G^+\{\int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]\theta(s)ds +$$

$$+\int_0^T X^*(s)[E - L(s)L^+(s)]X(s)[\int_0^s X^{-1}(u)N(u)dw(u)]ds\} +$$

$$+(E - G^+G)(\Lambda - \Lambda G^+G)^+ \cdot \{a - S\Phi_2(0)r(0)\} + \alpha,$$

где α является решением системы $\Lambda\alpha = 0$, $G\alpha = 0$, а вектор $\theta(t)$ удовлетворяет уравнению

$$d\theta(t) = M(t)L^+(t)\theta(t)dt + M(t)\Phi_1(t)r(t)dt + f(t)dt, \;\; \theta(0) = 0.$$

Слайд 37. Теорема 13

$$dL(t)\xi(t) = M(t)\xi(t)dt + f(t)dt + N(t)dw(t),\ S\xi(0) = a, \quad (4)$$

Теорема 13

Решение задачи (4) (если оно существует) единственно тогда и только тогда, когда система $\Lambda\alpha = 0, G\alpha = 0$ имеет лишь нулевое решение $\alpha = 0$ и верны равенства

$$P_4(t) = Q_4(t) = 0,\ \ 0 \le t \le T,$$

$$\Phi_1(t) = \Phi_2(t) = 0,\ \ 0 \le t \le T. \quad (9)$$

 Публикаци

- Гликлих Ю. Е., Машков Е. Ю. Стохастические уравнения леонтьевского типа и производные в среднем случайных процессов / Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Том 6, №2. С.25-39.
- Машков Е. Ю. Об одном подходе к изучению стохастических уравнений леонтьевского типа с импульсными воздействиями / Уфимский математический журнал. Том 12. №3 (2020). С. 51-61.

Благодарности

Спасибо за внимание!