Стохастический лагранжев подход к вязкой гидродинамике

Ю.Е. Гликлих
Воронежский государственный университет
E-mail: yeg@math.vsu.ru

Доклад посвящен лагранжеву подходу к гидродинамике, инициированному известными работами В.И. Арнольда и затем Д. Эбина и Дж. Марсдена. В статье Эбина и Марсдена на языке бесконечномерной слабо римановой геометрии групп соболевских диффеоморфизмов компактных многообразий была очень красиво описана гидродинамика идеальных несжимаемых жидкостей. В частности было показано, что поток идеальной несжимаемой жидкости с нулевой внешней силой описывается уравнением геодезической слабой римановой метрики на группе сохраняющих объем диффеоморфизмов.

Мы показываем, что потоки вязкой несжимаемой жидкости описываются стохастическими аналогами уравнений Эбина и Марсдена, в которых обычная ковариантная производная на группе диффеоморфизмов заменяется вторыми производными в среднем слева. Хотя конструкция основана на применении стохастического анализа, результаты удается получить для детерминированных (не случайных) вязких жидкостей. В отличие от Эбина и Марсдена мы рассматриваем гидродинамику только на плоском n-мерном торе. Напомним, что плоский тор получается факторизацией n-мерного евклидова пространства по целочисленной решетке, при которой риманова метрика на торе наследуется из евклидовой метрики пространства. Изучение движения жидкости та торе – это достаточно известная постановка задачи в гидродинамике.

Для простоты изложения мы опишем теорию производных в среднем для процессов в $\mathbb{R}^n$. Однако из-за того, что геометрия на торе наследуется из $\mathbb{R}^n$, это изложение без изменений применяется на торе.
Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ в $\mathbb{R}^n$ (где мы фиксируем σ-алгебру борелевских множеств), $t \in [0, T]$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и такой, что $\xi(t)$ принадлежит пространству $L_1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ при всех t.

Обозначим через $\mathcal{N}_t^{\xi}$ σ-подалгебру "настоящее" в $\mathcal{F}$, порожденную прообразами борелевских множеств из $\mathbb{R}^n$ при отображении $\xi(t) : \Omega \to \mathbb{R}^n$. $\mathcal{N}_t^{\xi}$ предполагается полным, т.е. содержащим все множества вероятности ноль.
Для удобства мы обозначаем через E_t^{ξ} условное математическое содержание $E(\cdot|\mathcal{N}_t^{\xi})$ относительно "настоящего" $\mathcal{N}_t^{\xi}$ для $\xi(t)$.

Следуя Э. Нельсону, введем производной в среднем слева. Нам потребуется только эта производная.
Производная в среднем слева $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайный элемент

$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E^\xi_t\left(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t}\right) \tag{1}$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, а символ $\Delta t \to +0$ означает, что $\Delta t \to 0$ и $\Delta t > 0$.

Из свойств условного математического ожидания следует, что $D\xi(t)$ можно представить как суперпозицию $\xi(t)$ и измеримого по Борелю векторного поля (регрессии)

$$a(t,x) = \lim_{\Delta t \to +0} E\left(\frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \middle| \xi(t) = x\right) \tag{2}$$

на $\mathbb{R}^n$. Это означает, что $D\xi(t) = a(t, \xi(t))$.

Пусть $Z(t,x)$ – C^2-гладкое векторное поле на $\mathbb{R}^n$, и $\xi(t)$ – стохастический процесс в $\mathbb{R}^n$.
L_1-предел вида

$$D_* Z(t,\xi(t)) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^{\xi}\left(\frac{Z(t,\xi(t)) - Z(t-\Delta t, \xi(t-\Delta t))}{\Delta t}\right) \quad (3)$$

называется производной в среднем слева от Z вдоль $\xi(\cdot)$ в момент времени t.

Конечно, $D_*Z(t,\xi(t))$ может быть представлены как суперпозиции $\xi(t)$ с некоторыми борелевскими векторным полем (регрессией). Это векторное поле (если это не приведет к путанице) мы будем также обозначать D_*Z.

Для процесса с коэффициентом диффузии $\sigma^2 I$ в $\mathbb{R}^n$ имеет место следующая формула

$$D_* Z = \frac{\partial}{\partial t} Z + (Y_*^0 \cdot \nabla) Z - \frac{\sigma^2}{2} \Delta Z, \tag{4}$$

где $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$, Δ – лапласиан, точка обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ и векторное поле $Y_*^0(t, x)$ – регрессия производной слева.

Производную в среднем второго порядка $D_*D_*\xi(t)$ мы описываем как первую производную D_* от регрессии (векторного поля) $D_*\xi$. В случае, когда ξ имеет коэффициент диффузии $\sigma^2 I$, обозначим регрессию $D_*\xi$ символом Y. Тогда по формуле (4) мы получаем

$$D_*D_*\xi = \left(\frac{-\sigma^2}{2}\Delta + Y\cdot\nabla + \frac{\partial}{\partial t}\right) Y, \tag{5}$$

где правая часть формулы (5) совпадает с левой частью уравнения Бюргерса с вязкостью $\frac{\sigma^2}{2}$.

Пусть $\mathcal{T}^n$ – плоский n-мерный тор и $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ – его группа соболевских диффеоморфизмов класса $H^s (s > n/2 + 1)$. Напомним, что для $s > n/2 + 1$ отображения из H^s имеют гладкость C^1.
$\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ является является гильбертовым многообразием и группой относительно суперпозиции с единицей $e = id$.
Касательное пространство $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ – это пространство всех H^s-векторных полей на $\mathcal{T}^n$.

В любом $T_f\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ можно определить L^2-скалярное произведение по формуле

$$(X, Y) = \int_{\mathcal{T}^n} \langle X(m), Y(m)\rangle_{f(m)}\mu(dm) \tag{6}$$

Семейство этих скалярных произведений образует так называемую слабую риманову метрику на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. В частности, в $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ (6) принимает вид

$$(X, Y)_e = \int\limits_{\mathcal{T}^n} \langle X(m), Y(m)\rangle_m \mu(dm). \tag{7}$$

Правый сдвиг $R_f : \mathcal{D}^s(T^n) \to \mathcal{D}^s(T^n)$, где $R_f(\Theta) = \Theta \circ f$ для $\Theta, f \in \mathcal{D}^s(T^n)$ – C^∞-гладкое отображение. Касательное отображение к правому сдвигу имеет вид $TR_f(X) = X \circ f$ for $X \in T\mathcal{D}^s(T^n)$.
С другой стороны, левый сдвиг $L_f : \mathcal{D}^s(T^n) \to \mathcal{D}^s(T^n)$, где $L_f(\Theta) = f \circ \Theta$ для $\Theta, f \in \mathcal{D}^s(T^n)$, только непрерывен. Зафиксируем вектор $x \in \mathbb{R}^n$ и обозначим через $l_x : T^n \to T^n$ отображение$l_x(m) = m + x$ по модулю факторизации по целочисленной решетки пространства $\mathbb{R}^n$. Отметим, что левый сдвиг Ll_x C^∞-гладок.

Напомним, что $T\mathcal{T}^n = \mathcal{T}^n \times \mathbb{R}^n$. Введем операторы

$$B : T\mathcal{T}^n \to \mathbb{R}^n$$

– проекции на второй сомножитель в $\mathcal{T}^n \times \mathbb{R}^n$, и

$$A(m) : \mathbb{R}^n \to \mathcal{T}^n_m,$$

– обратный к B линейный изоморфизм $\mathbb{R}^n$ на касательное пространство к $\mathcal{T}^n$ в $m \in \mathcal{T}^n$.
Введем

$$Q_{g(m)} = A(g(m)) \circ B,$$

где $g \in \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, $m \in \mathcal{T}^n$, Для каждого $Y \in T_f\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ мы получаем, что $Q_g Y = A(g(m)) \circ B(Y(m)) \in T_g\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ при всех $f \in \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

Для гладкого векторного поля $Y(t)$ вдоль гладкой кривой $g(t)$ в $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ ковариантная производная в момент времени t^* определяется формулой

$$\frac{\bar{D}}{dt} Y(t)|_{t=t^*} = \frac{d}{dt}(Q_{g(t^*)} Y(t))|_{t=t^*}.$$

Так же, как в конечномерном случае, геодезическая – это гладкая кривая $g(t)$ в $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ такая, что

$$\frac{\bar{D}}{dt} \dot{g}(t) = 0. \qquad (8)$$

Для такой кривой $g(t)$ построим вектор $v(t) \in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ по формуле $v(t) = \dot{g}(t) \circ g^{-1}(t)$.
Если $g(t)$ – геодезическая, кривая $R_f g(t)$ – также геодезическая.
Пусть $g(t)$ – геодезическая и $x \in \mathbb{R}^n$ – некоторый вектор. тогда $l_x g(t)$ – геодезическая.

Рассмотрим оператор $\bar{A} : \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n) \times \mathbb{R}^n \to T\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ такой, что $\bar{A}_e$ совпадает с введенным выше A и для каждого $g \in \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ отображение $\bar{A}_g : \mathbb{R}^n \to T_g\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ получается из $\bar{A}_e$ правым сдвигом, т.е, для $X \in \mathbb{R}^n$:

$$\bar{A}_g(X) = TR_g \circ A_e(X) = (A \circ g)(X).$$

Каждое правоинвариантное векторное поле $\bar{A}(X)$ является C^∞-гладким на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ для каждого $X \in \mathbb{R}^n$.
Для любой точки $m \in T^n$ обозначим через $exp_m : T_mT^n \to T^n$ отображение, которое переводит вектор $X \in T_mT^n$ в точку $m + X$ по модулю факторизации по целочисленной решетке на T^n. Семейство таких отображений порождает отображение $\overline{exp} : T_e\mathcal{D}^s(T^n) \to \mathcal{D}^s(T^n)$, которое переводит вектор $X \in T_e\mathcal{D}^s(T^n)$ в $e + X \in \mathcal{D}^s(T^n)$, где $e + X$ – диффеоморфизм T^n вида: $(e + X)(m) = m + X(m)$.

Рассмотрим суперпозицию $\overline{exp} \circ \bar{A}_e : \mathbb{R}^n \to \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. По построению для произвольного $X \in \mathbb{R}^n$ мы получаем, что $\overline{exp} \circ \bar{A}_e(X)(m) = m + X$, т.е., тот же самый вектор X добавляется к каждой точке m.
Пусть $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ – группа соболевских сохраняющих объем H^s-диффеоморфизмов на $\mathcal{T}^n$ $(s > n/2 + 1)$, подгруппа и гильбертово подмногообразие $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Так же как для $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ можно ввести правый сдвиг и левый сдвиг. Первый – C^∞-гладкий, а второй – непрерывен.

Касательное пространство к $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ в единице $e = id$ обозначается через $T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Это пространство всех бездивергентных H^s-векторных полей на $\mathcal{T}^n$. Практически всеп свойства всех операторов (включая правый и левый сдвиги) сохраняются на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Только l_x имеет несколько измененные свойства (об этом ниже).

Отметим, что поле операторов A можно рассматривать как отображение $A : \mathbb{R}^n \to T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$.

На $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ мы используем слабую риманову метрику, которая является сужением (6) на касательное расслоение $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Рассмотрим ортогональную проекцию относительно скалярного произведения (7)

$$P : H^s \to T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n).$$

Из разложения Ходжа вытекает, что эта проекция существует и ядро P является пространством всех градиентов. Так что, для произвольного $Y \in H^s$ имеет место представление

$$P(Y) = Y - \mathrm{grad} p, \tag{9}$$

где p – некоторая H^{s+1}-функция на $\mathcal{T}^n$ (единственная с точностью до аддитивной константы).

Проектор P правыми сдвигами порождает послойно правоинвариантный проектор $\bar{P}$ по формуле $\bar{P}_g = TR_g PTR_g^{-1}$ в точке g группы диффеоерфизмов.
$\bar{P}$ является гладким отображением.
Ковариантная производная на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ вводится формулой $\frac{\tilde{D}}{dt} = \bar{P}\frac{\bar{D}}{dt}$.
Рассмотрим уравнение

$$\frac{\tilde{D}}{dt}\dot{g}(t) = \bar{F}(t, g(t), \dot{g}(t)), \tag{10}$$

на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Если F достаточно гладко, для любого начального данного $g(0) = e$ и $\dot{g}(0) = u_0 \in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ уравнение (10) имеет решение, корректно определенное на некотором интервале $t \in [0, T]$. Это решение описывает поток идеальной несжимаемой жидкости на $\mathcal{T}^n$ под действием внешней силы F. Если $F = 0$, это геодезическая связности Леви-Чивита метрики (7) и она описывает поток в отсутствие внешних сил.

Используя оператор P и формулу (9) мы получаем следующую модификацию формулы (5). В случае, когда ξ имеет коэффициент диффузии $\sigma^2 I$, обозначим регрессию $D_*\xi$ символом Y. Тогда

$$PD_*D_*\xi = \left(\frac{-\sigma^2}{2}\Delta + Y\cdot\nabla + \frac{\partial}{\partial t}\right)Y - \mathrm{grad}\,p, \tag{11}$$

где правая часть совпадает с левой частью уравнения Навье-Стокса.

Пусть $w(t)$ – винеровский процесс в $\mathbb{R}^n$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Построим случайный процесс

$$W^{(\sigma)}(t) = \overline{exp} \circ \bar{A}_e(\sigma w(t)) \tag{12}$$

в $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. По построению, для $\omega \in \Omega$ соответствующая выборочная траектория $W^{(\sigma)}_\omega(t)$ – это диффеоморфизм вида $W^{(\sigma)}_\omega(t)(m) = m + \sigma w_\omega(t)$. Отметим, что для заданного $\omega \in \Omega$ и заданного $t \in \mathbb{R}$ мы получаем, что $w(t)_\omega$ – постоянный вектор в $\mathbb{R}^n$. Это означает, что для заданного ω и t действие $W^{(\sigma)}_\omega(t)$ совпадает с $l_{w(s)_\omega}$.

В терминах винеровского процесс $W^{(\sigma)}(t)$ можно ввести аналоги обычных стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито. В далбнейшем мы рассматриваем такие уравнения, у которых коэффициент при $W^{(\sigma)}(t)$ равен I. Напомним, что σ уже входит в конструкцию $W^{(\sigma)}(t)$.
Производные в среднем также вводятся в соответствии с обычным определением. Нас интересует оператор второй производной слева D_*D_*. Напомним, что это выражение мы понимаем как применение оператора D_* к регрессии производной слева случайного процесса (т.е. к векторному полю).
Здесь и ниже мы предполагаем, что $s > n/2 + 2$. Так что диффеоморфизмы из $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ имею гладкость C^2 так же, как и векторные поля из $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ на торе. Везде ниже мы используем один и тот же стохастический процесс $W^{(\sigma)}(t)$, построенный из выбранного нами винеровского процесса $w(t)$ в $\mathbb{R}^n$ по формуле (12).

Рассмотрим H^s-векторное F поле на $\mathcal{T}^n$, т.е. вектор в $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Разнесем его правыми сдвигами на всю группу $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, получим правоинвариантное векторное поле $\bar{F}$. Рассмотрим уравнение

$$D_*D_*\xi(t) = \bar{F} \tag{13}$$

Решение этого уравнения мы интерпретируем как случайны поток, математическое ожидание которого является потоком вязкой жидкости с коэффициентом вязкости $\frac{\sigma^2}{2}$. Чтобы убедиться в этом, перейдем к эйлерову описанию, т.е. опишем соответствующее уравнения в $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

Перенеся обе части уравнения (13) в e, мы получим конечномерное уравнение на торе вида $D_* D_* \xi(t) = F$. Отметим, что в данном случае при определении D_* условное математическое ожидание заменяется на обычное математическое ожидание (ниже мы опишем это более подробно), но тем не менее равенство (5) остается верным. Обозначим регрессию $D_* \xi$ через v. Тогда из равенства (5) мы получаем в $T_e \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial}{\partial t} v + (v \cdot \nabla) v - \frac{\sigma^2}{2} \Delta v = F.$$

Перейдем к вязким несжимаемым жидкостям. Не трудно видеть из построения процесса $W^{(\sigma)}(t)$, что он принимает значения в $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Так что приведенные выше конструкции можно осуществить и на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. В этом случае мы используем правоинвариантнй гладкие проектор $\bar{P}$ и рассмотрим уравнение

$$\bar{P} D_* D_* \xi = \bar{F}, \tag{14}$$

где теперь F – это бездивергентное H^s векторное поле на $\mathcal{T}^n$, а $\bar{F}$ – правониварианнтное векторное поле на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Решение этого уравнения мы интерпретируем как случайны поток, математическое ожидание которого является потоком вязкой несжимаемой жидкости с коэффициентом вязкости $\frac{\sigma^2}{2}$. Чтобы убедиться в этом, перейдем к эйлерову описанию, т.е. опишем соответствующее уравнения в $T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$.

Перенеся обе части уравнения (14) в e, мы получим конечномерное уравнение на торе вида $PD_*D_*\xi(t) = F$. Как и выше, отметим, что в данном случае при определении D_* условное математическое ожидание заменяется на обычное математическое ожидание (ниже мы опишем это более подробно), но тем не менее равенство (5) остается верным. Обозначим регрессию $D_*\xi$ через u. Тогда из равенства (5) и из формулы (9), описывающей действие P, мы получаем в $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ уравнение Навье-Стокса

$$\frac{\partial}{\partial t}u + (u\cdot\nabla)u - \frac{\sigma^2}{2}\Delta u - \mathrm{grad} p = F.$$

Теперь мы покажем, что решения уравнений (13) и (14) можно построить путем стохастических возмущений потоков пылевидной материи и вязкой несжимаемой жидкости, соответственно. Начнем с уравнения типа (13).
Пусть $g(t)$ – решение уравнения (8) на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ с начальным условием $g(0) = e$ и $\dot{g}(0) = v_0 \in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Это решение существует на некотором интервале $t \in [0, T]$. Рассмотрим $v(t) = \dot{g}(t) \circ g^{-1}(t) \in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Этот бесконечномерный вектор может быть также описан как векторное поле на $\mathcal{T}^n$, которое мы обозначим $v(t, m)$.

Рассмотрим случайный процесс $\eta(t) = W^{(\sigma)}(t) \circ g(t)$ на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. В конечномерном представлении $\eta(t)$ является случайным диффеоморфизмом на $\mathcal{T}^n$ вида $\eta(t,m) = g(t,m) + \sigma w(t)$. Построим дополнительно случайный процесс $\xi(t) = \eta(T-t)$, или, в конечномерном описании, $\xi(t,m) = g(T-t,m) + \sigma w(T-t)$. Поскольку $w(t)$ – мартингал относительно его собственного "прошлого", из свойств условного математического ожидания мы выводим, что $D_*\xi(t) = \dot{g}(T-t,m) = v(T-t, g(T-t,m))$ и поэтому $D_*D_*\xi(t) = \frac{\bar{D}}{ds}\dot{g}(s)|_{s=T-t} = 0$ на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

Отметим, что $\xi_t(t,m) = m - \sigma w(T-t) + \sigma w(T-t) = m$, т.е. $\xi_t(t) = e \in \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Тогда σ-алгебра "настоящее" $\mathcal{N}_t^\xi$ тривиальна, и это означает, что условное математическое ожидание относительно этой σ-алгебры совпадает с обычным математическим ожиданием. Таким образом, принимая во внимание соотношения между $v(t)$ и $g(t)$ и определение D_*, мы получаем, что

$$D_*\xi_t(s) = E(v(T-t, m-\sigma w(T-t))) = E(Q_e T\mathbb{R}^{-1}_{W^{(\sigma)}(T-t)} v(T-t)).$$

Введем на $\mathcal{T}^n$ векторное поле $V(t,m) = E(v(t, m - \sigma w(t)))$ (в бесконечномерном описании $V(t) = E(Q_e T\mathbb{R}^{-1}_{W^{(\sigma)}(t)} v(t))$).

Теорема. $V(T-t,m)$ удовлетворяет уравнению Бюргерса

$$\frac{d}{dt}V(T-t,m)+(V(T-t,m)\cdot\nabla)V(T-t,m)-\frac{\sigma^2}{2}\nabla^2 V(T-t,m)=0, \tag{15}$$

где ∇^2 – оператор Лапласа-Бельтрами, который на плоском торе совпадает с обычным лапласианом.

Теперь перейдем к случаю несжимаемых жидкостей.
Пусть $g(t)$ – решение уравнения (10) с $F=0$. Рассмотрим $u(t)=\dot{g}(t)\circ g^{-1}(t)\in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Этот бесконечномерный вектор можно также представить как бездивергентное векторное поле на $\mathcal{T}^n$, которое мы обозначим $u(t,m)$. Напомним, что $u(t,m)$ удовлетворяет уравнению Эйлера без внешней силы: $\frac{\partial u}{\partial t}=-P((u\cdot\nabla)u)$, которое после применения формулы (9) принимает обычный вид $\frac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u-\mathrm{grad}p=0$.

Рассмотрим введенный выше процесс $W^{(\sigma)}(t)$. По построению он принимает значения в $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Таким образом, на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ мы можем повторить приведенную выше конструкцию для $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, т.е. определить $\eta(t) = W^{(\sigma)}(t) \circ g(t)$, где $t \in [0, T]$ и $\xi(t) = \eta(T - t)$ (т.е., в конечномерных обозначениях $\xi(t, m) = g(T - t, m) + \sigma w(T - t))$. Легко видеть, что $D_*\xi(t) = \dot{g}(T - t, m) = u(T - t, g(T - t, m))$ и таким образом $\bar{P}D_*D_*\xi(t) = \frac{\widetilde{D}}{ds}\dot{g}(s)_{|s=T-t} = 0$ на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$.

Так же, как выше процесс $\xi_t(s) = \xi(s) \circ \xi^{-1}(t)$ обладает свойством $\xi_t(t) = e$. Его конечномерное описание в точности аналогично случаю $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.
Введем на $\mathcal{T}^n$ векторное поле $U(t,m) = E\big(u(t, m - \sigma w(t))\big)$ (прямой аналог $V(t,m)$). Мы также обозначим это поле как бесконечномерный вектор $U(t) = E\big(Q_e TR^{-1}_{W^{(\sigma)}(t)} u(t)\big)$.
Доказывается, что векторное поле $U(t,m)$ бездивергентно.

Итак, $U(t) \in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Легко показать, что

$$D_*\xi_t(s)_{|s=t} = U(T-t). \tag{16}$$

Выберем $t \in [0, T]$ и $\omega \in \Omega$ и рассмотрим кривую $\zeta_{t,\omega}(s)$, $s \in [0, T]$, зависящую от параметра ω, вида:

$$\zeta_{t,\omega}(s) = R^{-1}_{W^{(\sigma)}_\omega(T-t)} g(T-s, g^{-1}(T-t)) =$$

$$g(T-s, g^{-1}(T-t, m-\sigma w(T))). \tag{17}$$

Кривая $\zeta_{t,\omega}(s)$ задана по аналогии с $\xi_{t,\omega}(s)$, введенном выше, но в формуле для $\xi_{t,\omega}(s)$ имеется дополнительный стохастический член $\sigma w(T-s)$. Таким образом, мы можем рассматривать $\zeta_{t,\omega}(s)$ как гладкую кривую с начальным условием $\zeta_{t,\omega}(t) = \mathbb{R}^{-1}_{W^{(\sigma)}_{\omega}(T-t)} e = (W^{(\sigma)}_{\omega}(T-t))^{-1}$. Отметим, что

$$\frac{d}{ds} l_{(\sigma w_{\omega}(T-t))} \zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t} = Q_e \frac{d}{ds} \zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t} = -Q_e TR^{-1}_{W^{(\sigma)}_{\omega}(T-t)} v(T-t).$$

На $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ оператор I_x не переводит геодезические в геодезические. Так что, мы имеем

$$PD_*D_*\xi_t(s)_{|s=t} = PD_*U(T-t,\xi_t(s))_{|s=t} =$$

$$-PE(\frac{\bar{D}}{ds}\frac{d}{ds}I_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t}) \neq 0.$$

Следовательно нет аналога предыдущих формул. Принимая во внимание формулу (9), мы можем доказать только следующее утверждение

Теорема. Поле $U(T-t)$ удовлетворяет уравнению Навье-Стокса

$$\frac{d}{dt}U(T-t,m)+(U(T-t,m)\cdot\nabla)U(T-t,m)-\frac{\sigma^2}{2}\nabla^2 U(T-t,m)-\mathrm{grad}\, p$$

$$=-PE(\frac{\bar{D}}{ds}\frac{d}{ds}I_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t})$$

с внешней силой $-PE(\frac{\bar{D}}{ds}\frac{d}{ds}I_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t})$.

Отметим, что по каждому потоку $g(t)$ идеальной несжимаемой жидкости сила

$$-PE(\frac{\bar{D}}{ds}\frac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t})$$

однозначно восстанавливается с использованием формулы (17) и ковариантной производной. Введем правоинвариантное векторное поле $\overline{PE(\frac{\bar{D}}{ds}\frac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t})}$, порожденное вектором $PE(\frac{\bar{D}}{ds}\frac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t}) \in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Рассмотрим уравнение $\bar{P}D_*D_*\xi = \overline{PE(\frac{\bar{D}}{ds}\frac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t})}$. После переноса правыми сдвигами обеих частей этого уравнения в $T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ получим $T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ уравнение $PD_*D_*\xi_t(s)_{|s=t} = PE(\frac{\bar{D}}{ds}\frac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t})$, оно предыдущими рассуждениями преобразуется в уравнение Навье-Стокса с нулевой внешней силой