УДК: 517.956.223

Об одном случае квазикорректности канонической граничной задачи мембранной теории выпуклых оболочек

Е. В. Тюриков

1) etyurikov@hotmail.com; Донской государственный технический университет

Аннотация

Найден геометрический критерий квазиустойчивости для одного класса задач мембранной теории выпуклых оболочек.

Ключевые слова: выпуклая оболочка, задача Римана-Гильберта, индекс граничного условия.

Статическая граничная задача для тонкой упругой сферической оболочки с кусочно-гладкой границей (*сферический купол*) поставлена впервые Власовым [1] и Гольденвейзером [2] в рамках безмоментной технической теории оболочек. Математическая постановка этой задачи и её полное решение даны автором в работах [3, 4] с использованием метода обобщённых аналитических функций [5]. Как установлено в [6], картины разрешимости граничных задач для сферических куполов и выпуклых куполов общего вида имеют существенные различия. В общем случае стандартный алгоритм вычисления индекса соответствующего граничного условия Римана–Гильберта для уравнения безмоментного равновесия не позволяет получить эффективные формулы для его вычисления. Для некоторых специальных классов выпуклых куполов эта проблема решена автором в [7, 8]. В частности, для *канонических* куполов установлена квазикорректность основной граничной задачи. В настоящей работе вводятся новые понятия, позволяющие дать полную картину разрешимости квазикорректной задачи для канонических куполов, а также уточнить результаты работы [8].

1. Граничная задача R. Пусть S — односвязная поверхность с кусочно-гладким краем $L = \bigcup_{j=1}^{n} L_j$ и угловыми точками p_i $(i = 1,\dots, n)$. Предполагается, что S есть внутренняя часть поверхности S_0 строго положительной гауссовой кривизны класса регулярности $W^{3,r}$, $r > 2$, а каждая из гладких дуг L_j принадлежит классу $C^{1,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$. Зададим на S вдоль L кусочно-непрерывное векторное поле $\boldsymbol{r} = \{\alpha(s), \beta(s)\}$, допускающее разрывы первого рода в точках p_j, с касательной и нормальной составляющими $\alpha(s)$, $\beta(s)$

($\alpha^2+\beta^2=1,\ \beta\geqslant 0$), где s — натуральный параметр, функции $\alpha(s)$, $\beta(s)$ — гёльдеровы на каждой из дуг L_j.

Введём обозначения: J — отображение поверхности S_0 на комплексную плоскость $z=x+iy$, заданное выбором сопряжённо изометрической параметризации (x,y) на S_0, $D=J(S)$ — ограниченная в комплексной плоскости z односвязная область с границей $\Gamma=\bigcup\limits_{j=1}^{n}J(L_j)$ и угловыми точками $q_i=J(p_i)$. Рассмотрим следующую задачу (задача R): найти в области D комплексно-значное решение $w(z)$ уравнения (*функцию изгибаний* поверхности S)

$$w_{\bar z}(z)-B(z)\bar w(z)=F(z),\quad z\in D, \tag{1}$$

по заданному граничному условию Римана–Гильберта

$$\operatorname{Re}\bigl\{\lambda(\zeta)w(\zeta)\bigr\}=\gamma(\zeta), \tag{2}$$

где

$$\lambda(\zeta)=s(\zeta)\bigl[\beta(\zeta)t(\zeta)-\alpha(\zeta)s(\zeta)\bigr], \tag{3}$$

$s(\zeta)=s_1(\zeta)+is_2(\zeta)$, $t(\zeta)=t_1(\zeta)+it_2(\zeta)$, $i^2=-1$, s_i $(i=1,2)$ — координаты касательного к Γ орта в точке ζ, t_i $(i=1,2)$ — координаты орта направления на плоскости, являющегося J-образом тангенциального направления на поверхности в точке $J^{-1}(\zeta)$, значения функций $\alpha(\zeta)$, $\beta(\zeta)$ совпадают со значением функций α, β в соответствующей точке $c=J^{-1}(\zeta)$, функция $\gamma(\zeta)$ гёльдерова на каждой из дуг $\Gamma_j=J(L_j)$, $w_{\bar z}=\dfrac{1}{2}(w_x+iw_y)$, $B(z)$, $F(z)$ — заданные в области D функции класса $L_r(D)$, $r>2$. При этом отыскиваются $W^{1,r}$-регулярные в области D решения $w(z)$, непрерывно продолжимые на L, за исключением точек разрыва q_i, в окрестности которых имеет место оценка $\bigl|w(z)\bigr|<\mathrm{const}\cdot\bigl|z-q_i\bigr|^{-\alpha_j}$, $0<\alpha_j<1$. Класс таких решений обозначим через H^*.

2. Задача R для канонических куполов. Пусть p — какая-либо из угловых точек p_i границы L, $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$ — главные направления в этой точке, k_1, k_2 — соответствующие им главные кривизны ($k_1>k_2$). Поверхность S есть *канонический* купол K, если направление одной из дуг, сходящихся в каждой угловой точке, совпадает с главным направлением $\boldsymbol{k}_2$, а для величин ν_i внутренних углов в точках p_i выполнены условия $0<\nu_i\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Задачу R для канонического купола K назовём канонической, если направление поля $\boldsymbol{r}$ в каждой точке p есть направление обобщённой касательной

[8] в этой точке, то есть $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2$, где $\boldsymbol{r}_i$ $(i = 1, 2)$ — односторонние пределы вектор функции $\boldsymbol{r}$ в точке p. Введём также обозначения: δ_i^2-отношение соответствующих главных кривизн в точке p_i $(0 < \delta_i < 1)$, $p(\nu_i)$ — угловая точка p_i с внутренним углом ν_i, $T(\nu_i)$ — множество (*сектор*) направлений *обобщённой* касательной в этой точке. Как установлено в [8], каноническая задача R квазикорректна для любого поля $\boldsymbol{r} \in T(\nu_i)$ в точке $p(\nu_i)$ $(i = 1, 2,\ldots, n)$, если $n \geqslant 2$.

3. Формулировка результатов. Задача R есть семейство задач $R^{\boldsymbol{r}}$ задач (1)–(3), каждая из которых задаётся выбором векторного поля $\boldsymbol{r}$. Следуя И. Н. Векуа [5] задачу $R^{\boldsymbol{r}}$ назовём s-квазикорректной в классе H^*, если она безусловно разрешима в этом классе, а её решение зависит от s вещественных произвольных постоянных (*s-порядок квазикорректности*).

Определение 1. Каноническая задача R называется квазиустойчивой относительно поля направления обобщённой касательной, если задача $R^{\boldsymbol{r}}$ s-квазикорректна для любого допустимого поля $\boldsymbol{r}$.

Пусть $p(\nu)$ — угловая точка границы L, $\boldsymbol{r} \in T(\nu)$. Направление поля $\boldsymbol{r}$ в точке $p(\nu)$ назовём *особенным* направлением обобщённой касательной, если точка $q = J(p)$ разрыва граничного условия (2) есть *особенный узел* [9] задачи (2), (3).

Определение 2. Угловую точку $p(\nu)$ назовём точкой неустойчивости задачи R, если сектор $T(\nu)$ содержит *особенное* направление.

Теорема 1. Угловая точка $p(\nu_i)$ есть точка неустойчивости задачи R тогда и только тогда, когда

$$\arccos\frac{1}{1+\delta_i} \leqslant \nu_i \leqslant \operatorname{arcctg}\sqrt{t_i},$$

где t_i — единственный положительный корень уравнения

$$2\sqrt{\frac{1+\delta_i^2 t}{\delta_i^2+t}} + \frac{1+\delta_i^2 t}{\delta_i^2+t} - 4\sqrt{\frac{E_i}{\mathcal{K}_i(1+t)^2+4E_i t}} = \frac{1}{t}.$$

Здесь E_i, $\mathcal{K}_i$ — Эйлерова разность и Гауссова кривизна поверхности S в точке p_i $(i = 1,\ldots, n)$.

Теорема 2. каноническая задача R квазиустойчива в классе H^* тогда и только тогда, когда граница L не содержит точек неустойчивости.

Список литературы

[1] Власов В. З. *Общая теория оболочек* // М.: Гостехиздат, 1949. — 528 с.

[2] Гольденвейзер А. Л. *Теория упругих тонких оболочек.* — М., 1976. — 512 с.

[3] Тюриков Е. В. *Обобщённая граничная задача Гольденвейзера для безмоментных сферических куполов* // Труды XIV межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону, 19–24 июня 2010. — Ростов-на-Дону, 2010. — Т. II. — С. 290–293.

[4] Тюриков Е. В. *Об одном классе граничных задач мембранной теории выпуклых оболочек* // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки. — 2012. — № 3. — С. 18–24.

[5] Векуа И. Н. *Обобщённые аналитические функции.* — М.: Физматлит, 1959. — 512 с.

[6] Тюриков Е. В. *Обобщённая граничная задача И. Н. Векуа мембранной теории выпукляx оболочек* // Исследования по математическому анализу и дифференциальным уравнениям. — Владикавказский научный центр РАН. — 2011. — Т. 5. — С. 225–229.

[7] Tjurikov E. V. *One case of exteneded boundary value problem of the membrane theory of convex shells by I. N. Vekua* // Проблемы анализа ∘ Issues Of Analysis. — 2018. — № 7. — P. 153–162.

[8] Tjurikov E. *The canonical form of the main boundary value problem of the membrane theory of convex shells* // Global and Stochastic Analysis. — 2020. — Vol. 7. № 2. — P. 209–218.

[9] Мусхелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения.* — М.: Физматлит, 1968. — 511 с.