INTERNATIONAL CONFERENCE
"New Trends of Stochastic Analysis-2021"

Обобщение модели случайной миграции

Э. Л. Шишкина
Воронежский государственный университет
Университетская пл., 1, Воронеж, 394018, Россия
E-mail: ilina_dico@mail.ru

Карл Пирсон в совместной работе со своим ассистентом [1] разработал математическую теорию случайной миграции животных для идеализированной системы, удовлетворяющей следующим условиям.

1. Предполагается, что места размножения и запасы корма имеют в среднем равномерное распределение по рассматриваемому району. Особого следования руслам рек или лесным тропам быть не должно.

2. Предполагается, что особи, распространяющиеся из центра, равномерно распределяются во всех направлениях. Среднее расстояние, на которое особь одного вида передвигается из одной среды обитания в другую, будет называться "перемещением", и может быть n таких "перемещений" от места рождения до места размножения или снова от места размножения до места размножения, если вид воспроизводится более одного раза. "Перемещение" следует отличать от простого передвижения, связанного с поиском пищи или другой краткосрочной целью рядом с местом обитания.

Задача, поставленная Пирсоном, заключалась в том, что если взять центр, сведенный в идеализированной системе к точке, каково будет распределение после n случайных перемещений N особей, перемещающихся из этого центра? Эту задачу Пирсон назвал *фундаментальной проблемой случайной миграции.*

Пусть начало координат O берется в центре, из которого распространяются особи. В произвольном месте на плоскости рассмотрим элементарную круглую область $\Omega_\alpha(C)$ с центром в C, площадью $\alpha \ll 1$. Расстояние от O до C обозначим через r. Пусть $\varphi_n(r^2)\cdot\alpha$ — частота особей на площади α после n-го перемещения, $\varphi_n(r^2)\cdot\alpha$ — их частота на том же элементе площади после $(n+1)$-го перемещения.

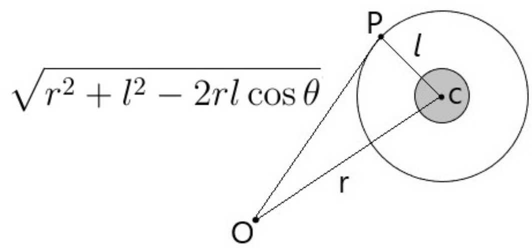

Рис. 1: Схема миграции на n-м перемещении.

Расстояние, на которое отдаляются особи за одно перемещение, обозначим через l. Тогда только те особи, которые, после n-го перемещения, находились на окружности радиуса l с центром в точке C могут попасть в $\Omega_\alpha(C)$ после $(n+1)$-го перемещения, при условии перемещения в определенном направлении. Обозначив через P произвольную точку на окружности с центром в точке C, радиуса l, а угол $\angle PCO$ через θ, получим, что частота особей на круге единичной площади с центром в точке P будет равна $\varphi_n(r^2+l^2-2rl\cos\theta)$ (см. Рис. 1). Учитывая, что точка P — произвольная точка окружности, получим, что $0 \le \theta \le 2\pi$ и частота особей в $\Omega_1(C)$ после $(n+1)$-го перемещения будет

$$\varphi_{n+1}(r^2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi_n(r^2+l^2-2rl\cos\theta)d\theta.$$

Это общая функциональная зависимость между плотностями при последовательных перемещениях. После элементарных преобразований, получим

$$\varphi_{n+1}(r) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \varphi_n(\sqrt{r^2+l^2-2rl\cos\theta})d\theta = ({}^1T_r^l\varphi_n)(r),$$

где $({}^\gamma T_x^y f)(x)$ — обобщенный сдвиг, изученный в [2]

$$({}^\gamma T_x^y f)(x){=}C(\gamma)\int\limits_0^{\pi} f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})\,\sin^{\gamma-1}\varphi\,d\theta, \qquad \gamma>0,$$

где $C(\gamma)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$. Таким образом, введя дополнительный параметр $\gamma>0$, получим обобщенную функциональная зависимость между плотностями при последовательных перемещениях вида

$$\varphi_{n+1}(r) = ({}^\gamma T_r^l\varphi_n)(r).$$

Рассматривая непрерывную зависимость перемещений от времени t, учитывая результаты из [2], получим уравнение для частоты особей $\varphi(t,r)$ вида

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{r^\gamma}\frac{\partial}{\partial r}r^\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

Это уравнение можно обобщить, используя метод дробных производных, следующим образом

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left(\frac{1}{r^\gamma}\frac{\partial}{\partial r}r^\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^\beta, \qquad 0\le\beta\le1,$$

где, дробная степень $\left(\frac{1}{r^\gamma}\frac{\partial}{\partial r}r^\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^\beta$, $0<\beta<1$, понимается, например, как в [3]:

$$\left(\frac{1}{r^\gamma}\frac{\partial}{\partial r}r^\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^\beta = (\mathcal{B}^\beta_{\gamma,0+}\varphi)(r) = (IB^{n-\beta}_{\gamma,0+}B^n_\gamma\varphi)(r),$$

где $n{=}[\beta]{+}1$, $B_\gamma=\frac{1}{r^\gamma}\frac{\partial}{\partial r}r^\gamma\frac{\partial}{\partial r}$,

$$(IB^\beta_{\gamma,0+}\,\varphi)(r) = \frac{1}{\Gamma(2\beta)}\int\limits_0^r\left(\frac{y}{r}\right)^\gamma\left(\frac{r^2{-}y^2}{2r}\right)^{2\beta-1}{}_2F_1\left(\beta{+}\frac{\gamma-1}{2},\beta;2\beta;1{-}\frac{y^2}{r^2}\right)\varphi(y)dy.$$

В докладе рассматриваются методы исследования приведенных моделей.

Список литературы

1. Pearson K., Blakeman J. *A mathematical theory of random migration.* Drapers' Company research memoirs: Biometric series, XV, — 1919. — P. 1–68.
2. Левитан Б. М. *Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье.* —М. : УМН. — 1951. — Т. 6. — Вып. 2. — С. 102–143.
3. Shishkina, E. L., Sitnik, S. M. *On fractional powers of Bessel operators.* Journal of Inequalities and Special Functions, Special issue To honor Prof. Ivan Dimovski's contributions. — 2017, 8:1. — P. 49–67.