К ТЕОРИИ ИНВАРИАНТНОСТИ ДРОБНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

М. Илолов, С. Лашкарбеков, Дж.Ш. Рахматов[1]
(Таджикистан, Душанбе, Центр инновационного развития науки и новых технологий НАНТ)
ilolov.mamadsho@gmail.com

Как представить неопределенность через стохастические дифференциальные включения дробного порядка? Для одного класса конечномерных систем включений с производными целого порядка был дан ответ на поставленный вопрос в работе J.P.Aubin, G.Da Prato и H.Frankowska [1]. В работе [2] данный вопрос рассматривается для импульсных дифференциальных включений. В цитированных работах предлагается комбинация двух подходов: метод "диффузионной стохастической неопределенности"вводимый через процесс Винера и метод "кокасательной неопределенности"с помощью многозначного отображения - сноса.

В настоящей работе предлагается анализ стохастической инвариантности для одного класса дробных дифференциальных включений для более общих слагаемых сноса и диффузии по сранению с работами [1], [2]. При этом используются результаты работы авторов [3], [4].

Рассмотим в пространствах $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m$ дробное стохастическое дифференциальное включение вида

$$D_t^\alpha u - Au \in F(t, u(t)) + g(t, u(t))dW(t), \qquad (1)$$

где D_t^α - производная Капуто порядка α от функции $u(t)$, $0 < \alpha < 1$, A - секториальный оператор в X, F - многозначное отображение из $J \times X$ в X, g - отображение из $J \times X$ в $\mathfrak{L}(Y, X)$ и $W - Y$ - значный процесс Винера, $J = [0, T]$. Включение (1) описывает вклад двух родов неопределенностей: кокасательной, представленной многозначным сносом F и стохастической через диффузии g.

Можно ввести в рассмотрение более общий случай в следующей задаче управления

$$D_t^\alpha u = f(t, u(t), v(t) + g(t, u(t)), v(t))dW(t), \qquad (2)$$

для почти всех

$$(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega, v_\omega(t) \in V(u_\omega(t)), \tag{3}$$

где ограничения на управления зависят от состояния системы.

Задача (1)-(2)-(3) является реализацией следующего общего положения. Если H-многозначное отображение из $J \times X$ в $J \times X \times L\mathfrak{L}(Y, X)$, то мы сможем ввести в рассмотрение дробное стохастическое дифференциальное включение вида

$$D_t^\alpha u \in H(t, u(t), dt \oplus dW(t)).$$

Обозначим, через $I_0(u_0, \gamma, \sigma)$ процесс Ито связанный со сносом $\gamma \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; X)$ и диффузией $\sigma \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathfrak{L}(Y, X))$ равенством

$$I_0 = (u_0, \gamma, \sigma)(t) =$$

$$= T_\alpha(t) u_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)\gamma(s) ds + \int_0^t S_\alpha(t-s)\sigma(s) dW(s), \tag{4}$$

где

$$T_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_l e^{\lambda^t \lambda^{\alpha-1}} R(\lambda^\alpha, A) d\lambda,$$

$$S_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_l e^{\lambda^t} R(\lambda^\alpha, A) d\lambda,$$

l-соответсвующий путь интегрирования такой, что $\lambda^\alpha \in \omega + \Sigma_\theta$, $\lambda \in l, R(\lambda^\alpha, A) = (\lambda^\alpha I - A)^{-1}$ и Σ_θ - сектор в комплексной плоскости $\mathbb{C}, \theta \in (0, \pi/2)$.

Под решением стохастического дифференциального включения (1) будем понимать процесс Ито (4) такой, что для почти всех $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$

$$(\gamma_\omega(t), \sigma_\omega(t)) \in H(t, u_\omega(t)).$$

Берем замкнутое подмножество $K \subset X$ и определим ограничения по времени с помощью стохастической трубки $t \to K(t) \subset X$. Обозначим через $\mathfrak{K}(t)$ подмножество

$$\mathfrak{K}(t) = \{u \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_t, P) | \text{ для п.в. } \omega \in \Omega, u_\omega \in K_\omega(t)\}.$$

Подмножество K называется инвариантным для H, если для любой начальной случайной величины $u_0 \in K_0$, все решения $u(\cdot)$ стохастического дифференциального включения, жизнеспособные в K, в том смысле, что

$$\forall t \in [0, T] \text{ для п.в. } \omega \in \Omega, H_\omega(t) \in K_\omega(t).$$

Чтобы охарактеризовать эти свойства используем концепцию стохастических кокасательных множеств $\mathfrak{M}_K(t, x)$ введенные в [1]. С этой целью адаптируем к стохастическому случаю данную концепцию.

Мы определим стохастическое кокасательное к K в (t, x) множество $\mathfrak{M}_K(t, x)$ в виде множества пар $(\gamma, \sigma) - \mathfrak{F}(t)$ - случайных величин обладающих следующим свойством:

Существует последовательность $h_n > 0$ сходящееся к 0 и $\mathfrak{F}(t + h_n)$ - измеримые случайные величины a^n и b^n такие, что

$$E(||a^n||^2) \to 0, E(||b^n||^2) \to 0, E(b^n | \mathfrak{F}(t)) = 0$$

и удовлетворяет следующее включение почти наверное:

$$x + h\gamma + \sigma(W(t + h) - W(t)) + ha^n + \sqrt{h} b^n \in K(t + h_n).$$

Установлено, что в случае липшицуемости отображения H "инвариантность"имеет место т. и т.т., когда

$$\forall t \geq 0, \forall u \in \mathfrak{K}(t), H(u) \in \mathfrak{M}_k(t, u).$$

Литература

1. Aubin J.-P., Da Prato G., Frankowska H. Stochastic Invariance for Differential Inclusions // Set-Valued Analysis : 8:181-201, 2000

2. Aubin J.-P. et all. Impulse differential Inclusions: a Viability Approach to Hybrid Systems // IEEE Transactions on Automatic Control : 47(1):2-20, 2002

3. Ilolov M., Kuchakshoev K.S., Rahmatov J.S. Fractional stochastic evolution equations: Whitenoise model // Communications on Stochastic Analysis, 2020, 14(3-4), — pp. 55-69

4. Илолов М., Гулджонов Д.Н., Рахматов Дж.Ш. Функционально-дифференциальные включения типа Хейла с дробным порядком производной в банаховом пространстве // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, — с. 208-225.