ОБ УСЛОВИЯХ ГЛОБАЛЬНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ПРОДОЛЖИМОСТИ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ю.Е. Гликлих, Д.С. Сергеева[1] (Воронеж, ВГУ)
yeg@math.vsu.ru, daha192000@mail.ru

Предварительные сведения о производных в среднем (в частности, о текущей скорости D_S и квадратичной производной в среднем D_2) имеются в [1,2]. Там также описана естественная модификация понятия непрерывности случайного потока на бесконечности, введенного Л. Шварцем.

Пусть матричный пучок $\lambda L + M$ в $\mathbb{R}^n$, где L вырождена, а M не вырождена, регулярен и удовлетворяет условию ранг-степень (см. [3]). Тогда после применения преобразования Чистякова (см. [3]) эти матрицы преобразуются к виду $L = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $M = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{pmatrix}$, где I_d и I_{n-d} – единичные матрицы, действующие в подпространствах $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{R}^{n-d}$, соответственно. Так как M не вырождена, J также не вырождена. Рассмотрим матрицу $\overline{\Theta}$ в $\mathbb{R}^n$ вида $\overline{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где Θ — симметрическая положительно определенная матрица, действующая в $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим уравнение вида

$$\left\{ \begin{array}{l} LD_S\xi(t) = M\xi(t) + f(t,\xi(t)) \\ D_2\xi(t) = \overline{\Theta} \end{array} \right. , \tag{1}$$

где $f(t,x) = (f_1(t,x_1,x_2), f_2(t,x_1,x_2))$ — гладкое отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Уравнение (1) распадается на два:

$$\left\{ \begin{array}{l} LD_S\xi_1(t) = J\xi_1(t) + f_1(t,\xi_1(t),\xi_2(t)) \\ D_2\xi(t) = \Theta \end{array} \right.$$

и

$$\left\{ \begin{array}{l} LD_S\xi_2(t) = \xi_2(t) + f_2(t,\xi_1(t),\xi_2(t))) \\ D_2\xi_2(t) = 0. \end{array} \right.$$

Так как $D_2\xi_2(t) = 0$, ξ_2 является детерминированным (не случайным) процессом и при выполнении условия, введенного в [4], оказывается постоянным вектором из $\mathbb{R}^{n-d}$. При выполнении тех же условий из [4], существует гладкое отображение $\overline{f}(t) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, такое, что $f_1(t, x_1, x_2) = \overline{f}(t, x_1)$. Таким образом, (1) сводится к

$$\left\{ \begin{array}{l} LD_S\xi_1(t) = J\xi_1(t) + \overline{f}(t, \xi_1(t)) \\ D_2\xi(t) = \Theta. \end{array} \right. \tag{2}$$

В [5] показано, что при введенных выше условиях уравнение (2) имеет решение, если начальное условие является случайным элементом с гладкой и нигде не равной нулю плотностью распределения.

Теорема. *Для того, чтобы и прямой, и обратный потоки, порожденные уравнением (1), были одновременно полны и непрерывны на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы на* $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ *существовали положительные гладкие собственные функции* $u(t, x)$ *и* $\overline{u}(t, x)$ *такие, что при всех* (t, x) *выполняются неравенства* $(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A})u < C$ *и* $(-\frac{\partial}{\partial t} + \overline{\mathcal{A}})\tilde{u} < \overline{C}$ *для некоторых положительных констант* C *и* $\overline{C}$*, где* $\mathcal{A}$ *и* $\overline{\mathcal{A}}$ *— генераторы прямого и обратного потоков, порожденных уравнением (2).*

Литература

1. Gliklikh Yu.E. Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics / Yu.E. Gliklikh. — London : Springer-Verlag, 2011. — XXIII+436 p.

2. Гликлих Ю.Е. Производные в среднем случайных процессов и их применения / Ю.Е. Гликлих. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2016. — 194 с.

3. Чистяков В.Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В.Ф. Чистяков, А.А. Щеглова. — Новосибирск: Наука, 2003. — 317 с.

4. Филипковская М.С. Об условиях глобальной разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений / М.С. Филипковская // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна». — Воронеж : ВГУ. — 2014. — С. 362–372.

5. Азарина С.В. О разрешимости неавтономных стохастических дифференциальных уравнений с текущими скоростями / С.В. Азарина, Ю.Е. Гликлих // Математические заметки. —2016. — Т. 100, № 1. — С. 3–12.