Афанасьев В.И. (Москва, Россия). **Слабо надкритический ветвящийся процесс с иммиграцией в случайной среде.**

В работе автора [1] установлена функциональная предельная теорема для критического ветвящегося процессом с иммиграцией в случайной среде (ВПИСС). Настоящая работа является продолжением [1] и посвящена надкритическим ВПИСС. В ряде работ (см., например, [2]) при различных ограничениях установлена сходимость п.н. надкритического ВПИСС, рассматриваемого в отдаленный момент n и нормированного случайным коэффициентом, зависящим только от случайной среды. В настоящей работе рассматривается надкритический ВПИСС с остановленной в отдаленный момент n иммиграцией, причем этот процесс рассматривается при условии его вырождения. Именно такие процессы важны при изучении случайных блужданий в случайной среде. Оказывается, асимптотическое поведение таких процессов существенно зависит от их типа (слабо, промежуточно и сильно надкритический), который определяется в соответствии со знаком математического ожидания некоторой функции от шага сопровождающего случайного блуждания. В работах автора [3] и [4] это продемонстрировано в частном случае, когда закон размножения в каждом поколении является геометрическим. В настоящей работе исследуется слабо надкритический ВПИСС.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – исходное вероятностное пространство и Δ – пространство вероятностных мер на $\mathbf{N}_0 := \{0, 1, \ldots\}$ с метрикой полной вариации. Рассмотрим случайные элементы $Q_1, Q_2, \ldots$, отображающие $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ в Δ^2. Это означает, что Q_n при каждом $n \in \mathbf{N}$ имеет вид (F_n, G_n), где F_n, G_n – вероятностные меры на $\mathbf{N}_0$. Последовательность $\Pi = \{Q_1, Q_2, \ldots\}$ называется *случайной средой.*

Последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин $\{Z_n,\ n \in \mathbf{N}_0\}$ называется *ветвящимся процессом с иммиграцией в случайной среде*, если $Z_0 = 0$ и

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n+\eta_n} \xi_i^{(n)}, \qquad n \in \mathbf{N}_0,$$

где предполагается, что при фиксированной случайной среде Π случайные величины $\left\{\xi_i^{(n)}, \eta_n :\ n \in \mathbf{N}_0,\ i \in \mathbf{N}\right\}$ независимы, причем при фиксированном $n \in \mathbf{N}_0$ величины $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots$ одинаково распределены с распределением F_{n+1} и величина η_n имеет распределение G_{n+1}. На языке ветвящихся процессов Z_n – численность частиц n-го поколения (без учета присоединившихся к этому поколению иммигрантов); η_n – число иммигрантов, присоединившихся к n-му поколению; $\xi_i^{(n)}$ – число непосредственных потомков i-ой частицы из совокупности, состоящей из частиц n-го поколения и присоединившихся к ним иммигрантов.

Другими словами, случайный процесс $\{Z_n,\ n \in \mathbf{N}_0\}$ при фиксированной случайной среде Π является (неоднородным) ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона с иммиграцией; при этом для каждого $n \in \mathbf{N}$ число иммигрантов, присоединившихся к n-му поколению, имеет распределение G_{n+1}, а закон размножения частиц n-го поколения (включая присоединившихся иммигрантов) есть F_{n+1}. Сопоставим (случайным) распределениям F_n и G_n при $n \in \mathbf{N}$ производящие функции $f_n(\cdot)$ и $g_n(\cdot)$.

В настоящей работе описанная модель рассматривается в предположении, что случайные элементы $Q_1, Q_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены. Иногда вместо условия $Z_0 = 0$ будем рассматривать более общую ситуацию, когда $Z_0 = r$, где $r \in \mathbf{N}_0$.

Положим при $i \in \mathbf{N}$

$$X_i = \ln f_i'(1), \qquad \theta_i = \frac{f_i''(1)}{\left(f_i'(1)\right)^2}, \qquad \mu_i = g_i'(1)$$

(при этом считаем, что $f_1'(1), f_1''(1), g_i'(1) \in (0, +\infty)$ п.н.). Введем *сопровождающее случайное блуждание*: $S_0 = 0$, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ при $n \in \mathbf{N}$. Заметим, что случайные векторы $(X_1, \theta_1, \mu_1), (X_2, \theta_2, \mu_2), \ldots$ для рассматриваемого ВПИСС являются независимыми и одинаково распределенными.

Укажем используемые в работе предположения относительно случайного вектора (X_1, θ_1, μ_1).

Предположение A. *Процесс $\{Z_i,\ i \in \mathbf{N}_0\}$ является слабо надкритическим, т.е. $\mathbf{E}X_1 > 0$ и $\mathbf{E}X_1 e^{-\beta X_1} = 0$ при некотором $\beta \in (0,1)$.*

Пусть $F(x)$ – функция распределения случайной величины X_1. Введем функцию распределения

$$F^{(\beta)}(x) = \gamma^{-1} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\beta x} dF(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Предположение B. *Распределение $F^{(\beta)}(x)$ принадлежит области притяжения некоторого устойчивого закона с индексом $\alpha \in (1,2]$ и является нерешетчатым.*

Предположение C. *Для некоторого $\varepsilon > 0$*

$$\mathbf{E}\left[\left(\ln^+ \mu_1\right)^{\alpha+\varepsilon} \exp(-\beta X_1)\right] < +\infty.$$

Предположение D. *Для некоторого $\varepsilon > 0$*

$$\mathbf{E}\left[\left(\ln^+ \theta_1\right)^{\alpha+\varepsilon} \exp(-\beta X_1)\right] < +\infty.$$

Предположение E. $\mathbf{E}e^{-X_1} < 1$.

Пусть $Z_i^{(n)}$ совпадает с Z_i при $i \le n$, а при $i > n$ означает число потомков в i-ом поколении от частиц n-го поколения процесса $\{Z_i,\ i \in \mathbf{N}_0\}$. Другими словами, $\left\{Z_i^{(n)},\ i \in \mathbf{N}_0\right\}$ – ветвящийся процесс в случайной среде с остановленной в момент n иммиграцией. Пусть $T^{(n)} = \min\left\{i \ge n : Z_i^{(n)} = 0\right\}$, т.е. $T^{(n)}$ – момент вырождения процесса $\left\{Z_i^{(n)},\ i \in \mathbf{N}_0\right\}$.

Положим $a_n = \exp(-S_n)$, $b_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_{i+1} a_i$ при $n \in \mathbf{N}_0$. Введем случайный процесс Y_n:

$$Y_n(t) = \frac{a_{\lfloor tn \rfloor}}{b_{\lfloor tn \rfloor}} Z_{\lfloor tn \rfloor}^{(n)}, \quad t \in (0,1).$$

Пусть символ $\Rightarrow$ означает сходимость в смысле конечномерных распределений. Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть выполненены предположения* **A, B**, **C**, **D** *и* **E**, *тогда при* $n \to \infty$

$$\left\{ Y_n(t),\ t \in (0,1);\ Z_n \mid T^{(n)} < +\infty \right\} \Rightarrow \{Y(t),\ t \in (0,1);\ Y\},$$

где $\{Y(t),\ t \in (0,1)\}$ – *случайный процесс* с *постоянными неотрицательными траекториями,* Y – *неотрицательная случайная величина, причем вероятности событий* $\{Y(t) > 0\}$ *и* $\{Y > 0\}$ *положительны.*

Положим $L_n = \min_{0 \le i \le n} S_i$ и $\tau_n = \min\{i : S_i = L_n,\ 0 \le i \le n\}$ при $n \in \mathbf{N}$. Доказательство теоремы 1 существенно опирается на следующие две теоремы, представляющие самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Если выполнены предположения* **A**, **B** *и* **C**, *то при* $n \to \infty$

$$\{Y_n(t),\ t \in (0,1);\ Z_n \mid \tau_n = n\} \Rightarrow \{U(t),\ t \in (0,1);\ U\},$$

где $\{U(t),\ t \in (0,1)\}$ – *случайный процесс* с *постоянными неотрицательными траекториями,* U – *неотрицательная случайная величина, причем вероятности событий* $\{U(t) > 0\}$ *и* $\{U > 0\}$ *положительны.*

Теорема 3. *Если выполнены предположения* **A**, **B**, **C** и $Z_0 = r \in \mathbf{N}_0$, *то для каждого* $u \in (0, +\infty)$ *при* $n \to \infty$

$$\{Y_n(t),\ t \in (0,1);\ Z_n \mid L_n \ge 0,\ S_n \le u\} \Rightarrow \left\{ V_u^{(r)}(t),\ t \in (0,1);\ V_u^{(r)} \right\},$$

где $\left\{ V_u^{(r)}(t),\ t \in (0,1) \right\}$ – *случайный процесс* с *постоянными неотрицательными траекториями,* $V_u^{(r)}$ – *неотрицательная случайная величина, причем вероятности событий* $\left\{ V_u^{(r)}(t) > 0 \right\}$, $\left\{ V_u^{(r)} > 0 \right\}$ *положительны.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект N 19-11-00111).

Список литературы

1. V. I. Afanasyev, “A critical branching process with immigration in random environment”, *Stochastic process. Appl.* (in print).

2. Y. Wang, Q. Liu, “Limit theorems for a supercritical branching process with immigration in a random environment”, *Science China Math.*, 60:12 (2017), 2481-2502.

3. В. И. Афанасьев, “О времени достижения высокого уровня невозвратным случайным блужданием в случайной среде”, *Теория вероятностей и ее применение*, **61**:2 (2016), 234–267.

4. В. И. Афанасьев, “О невозвратном случайном блуждании в случайной среде”, *Дискрет. матем.*, **28**:4 (2016), 6–28.